NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DUMONT

Sur l’une des formes canoniques de l’équation des surfaces cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 503-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__503_1>

[$M^2$3f] [B9a]

SUR L'UNE DES FORMES CANONIQUES DE L'ÉQUATION DES SURFACES CUBIQUES;

PAR M. DUMONT.

Lorsqu'on dit d'une forme réduite d'une équation algébrique représentant une courbe (ou une surface) qu'elle est *générale*, on peut l'entendre dans deux sens. Ou bien elle est *absolument générale*, c'est-à-dire est susceptible de représenter tous les cas, sans exception ; ou bien elle est *relativement générale*, c'est-à-dire peut représenter les cas généraux où la courbe (ou la surface) ne présente pas de singularités ou du moins certaines singularités. Il ne suffit pas, comme on l'a souvent remarqué, qu'une forme possède le nombre de paramètres convenable pour qu'elle puisse être même *relativement générale*. Ainsi l'équation du second degré $(ax+b)^2+c^2=0$ n'est pas même relativement générale, bien que contenant deux paramètres. Deux exemples d'équations non générales, quoique renfermant le nombre voulu de paramètres, sont donnés dans Salmon, *Algèbre supérieure*, trad. Chemin, page 216.

Aussi, bien que l'équation

$$ax^3+by^3+cz^3+du^3+ev^3=0,$$

donnée par Sylvester pour les surfaces du troisième ordre, contienne dix-neuf paramètres, comme l'équation générale du troisième ordre à trois variables, a-t-on considéré comme nécessaire de démontrer sa généralité. Cette généralité a été prouvée par divers auteurs; elle résulte aussi d'un raisonnement par lequel j'ai prouvé qu'une surface cubique générale est déterminée sans ambiguïté par sa hessienne (*Nouvelles Annales*; 1896).

La généralité de cette forme n'est, du reste, que *relative* et certaines surfaces ne peuvent être représentées par l'équation considérée. Au lieu de la considérer comme une forme à dix-neuf paramètres, on peut supposer que les plans x, y, z, u sont les faces d'un tétraèdre de référence; l'équation ne contient plus alors que sept paramètres : les rapports des nombres a, b, c, d, e à l'un d'entre eux et les trois nombres déterminant le plan $v=0$.

D'une manière générale, l'équation des surfaces cubiques est réductible à une forme à sept paramètres, car les formules générales

$$\rho y_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + x_4 \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

pour le changement de tétraèdre de référence contiennent $3\times 4 = 12$ paramètres dont on peut disposer pour faire disparaître douze coefficients dans l'équation générale

$$\Sigma A_{ijk} x_i x_j x_k = 0.$$

Parmi les formes à sept paramètres, considérons la suivante,

$$(1)\quad \begin{cases} ax^2y + by^2z + cz^2t + dt^2x \\ \quad + 2fxyz + 2gyzt + 2hztx + 2ktxy = 0. \end{cases}$$

Elle représente, comme on le voit de suite, une surface à la fois inscrite et circonscrite au tétraèdre de référence. Est-elle générale?

Considérons d'abord les cubiques planes pour lesquelles la forme analogue est

$$ax^2y + by^2z + cz^2x + 2mxyz = 0.$$

Analytiquement, on voit que les formules de transformations relatives au changement de triangle de référence contenant six paramètres, la réduction à cette forme à trois paramètres semble possible. Géométriquement, on voit que l'on ne pourra pas prendre pour l'un des sommets du triangle inscrit et circonscrit un point quelconque de la courbe, c'est-à-dire que le problème, s'il a des solutions, n'en a qu'un nombre limité. En fait, on constate que l'équation n'est que *relativement* générale, car, si l'on suppose que la courbe a un point double, il faut que ce point double soit isolé.

Si l'on passe maintenant aux surfaces cubiques, on voit que, analytiquement, il y a analogie avec les courbes, puisque le nombre de paramètres dont on dispose est précisément celui qui est nécessaire pour réduire l'équation à n'avoir que sept paramètres. Mais, géométriquement, l'analogie cesse, car ici le problème de la réduction devient indéterminé.

En effet, soient A_1 un point de la surface S, P le plan tangent en A_1, C le cône tangent à S et de sommet A_1, (γ) la courbe de contact de C avec la surface, (Γ) la cubique plane (S, P). Prenons un point A_2 sur (γ), soient C_1 le cône tangent à S et de sommet A_2 et A_3 un point de la courbe (γ_1) de contact de C_1 et S; soient enfin C_2 le cône tangent à S et de sommet A_3 et (γ_2) sa courbe de contact. Si A_4 est l'un des points d'intersection de (γ_2) et (Γ), le tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$, qui est inscrit, est tel que le plan tangent en A_2 passe en A_1, que le plan tangent en A_3 passe en A_2, le plan tangent en A_4 passe en A_3 et que le plan tangent en A_1 passe en A_4.

Ainsi, une multiple infinité de tétraèdres sont à la fois inscrits et circonscrits et l'on peut prendre le premier sommet quelconque.

Il resterait à voir dans quelles conditions le sommet A_4 est réel, c'est-à-dire dans quel cas le tétraèdre peut être pris pour tétraèdre de référence et, d'autre part, quelles sont les surfaces non comprises dans cette forme d'équation.

On voit, de suite : 1° que l'hypothèse

$$a = b = c = d = 0$$

donne des surfaces à quatre points doubles; 2° que

$$f = g = h = k = 0$$

donne des surfaces passant, comme (1), par les arêtes $x = z = 0$ et $y = t = 0$ du tétraèdre, mais telle de plus, que chaque face du tétraèdre coupe suivant une conique tangente à deux arêtes du tétraèdre, dont l'une est la droite de la surface qui est arête du tétraèdre. Ces surfaces n'ont, d'ailleurs, aucun point double, tant que $abcd \gtrless 0$, mais si l'on a de plus $d = 0$, le point

$$x = y = z = 0$$

est point double, le cône tangent étant réduit au plan $z^2 = 0$ et si l'on a $b = d = 0$, les surfaces représentées sont réglées avec $x = z = 0$ pour directrice double et $y = t = 0$ pour directrice simple.

On remarque encore les cas particuliers suivants :

$$d = g = h = k = 0,$$

un point double $x = y = z = 0$, cône tangent $z^2 = 0$;

$$d = f = h = k = 0,$$

un point double $x = y = z = 0$, cône tangent composé des plans $z = 0$, $cz + 2by = 0$;

$$d = f = g = h = 0,$$

deux points doubles $x = y = z = 0$ et $x = z = 0$, $ax + 2k = 0$, le cône tangent au premier est

$$cz^2 + 2kxy = 0;$$
$$c = d = f = g = 0,$$

deux points doubles, $x = y = z = 0$, $x = y = t = 0$, le cône tangent au premier est $x[hz + ky] = 0$, le cône tangent au second est le cône proprement dit

$$by^2 + 2htx = 0.$$

On a donc un binode et un cnicnode.

Le premier de ces cônes se réduit aux plans $xz = 0$, si l'on a de plus $k = 0$;

$$b = d = g = h = k = 0,$$

surfaces réglées possédant une directrice simple

$$y = t = 0$$

(la directrice double est $x = z = 0$).

Il y aurait lieu, pour les cas particuliers comme pour le cas général, de rechercher quelles sont les conditions restrictives, s'il y en a.