NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. CASPARY

Applications des méthodes de Grassmann. Centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 389-411

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__389_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[K9a][R2b]

APPLICATIONS DES MÉTHODES DE GRASSMANN. CENTRE DE GRAVITÉ D'UN QUADRILATÈRE ET D'UN PENTAGONE;

PAR M. F. CASPARY.

Il y a seulement quelques années que les géomètres se sont persuadés de la fécondité et de la puissance des méthodes de Grassmann. Ces méthodes s'adaptent, d'une manière remarquable, à la Géométrie, à l'Analyse, à la Mécanique et à la Physique mathématique; elles rattachent l'intuition au calcul et elles forment le lien entre les méthodes synthétiques et analytiques des Mathématiques pures et appliquées.

En France, M. E. Carvallo, le premier, a dirigé l'attention sur ces méthodes importantes (1).

M. Carvallo m'a fait l'honneur d'analyser (2) le Mémoire que j'ai publié sur la génération des courbes gauches algébriques (3), et de signaler mes deux Mémoires : *Sur les cubiques gauches* (4) et *Sur une méthode générale de la Géométrie qui forme le lien entre la Géométrie synthétique et la Géométrie analytique* (5), en les prenant comme point de départ pour

(1) *Voir* aussi la Note de M. H. FEHR, *Sur l'emploi de la multiplication extérieure en Algèbre* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XIV, p. 74; 1895)

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, p. 158; 1887.

(3) *Journal de M. Kronecker*, t. C, p. 405; 1887.

(4) *Bulletin de M. Darboux*, 2e série, t. XI, p. 222; 1887.

(5) *Ibid.*, t. XIII, p. 202; 1889.

ses propres recherches, consacrées à l'exposition et à l'application des méthodes de Grassmann ([1]).

Dans les Mémoires que je viens de citer et dans deux autres ([2]), j'ai exposé une partie des principes et des calculs, dus à Grassmann, et j'y en ai fait usage. De même dans mes autres recherches, relatives à la Géométrie ([3]) et à la théorie des fonctions thêta, des fonctions elliptiques et des fonctions hyperelliptiques, j'ai employé, pour leur invention, les mêmes principes et calculs; mais, pour la publication, je me suis servi des méthodes usuelles, parce que les méthodes de Grassmann n'étaient pas assez connues.

Bien que, depuis une dizaine d'années, le nombre des géomètres ait fortement grandi ([4]) qui s'intéressent aux méthodes de Grassmann et s'en s'occupent, elles ne sont pas répandues jusqu'à ce jour et elles n'ont point la place qu'elles méritent. Pour contribuer à leur connaissance et pour les rendre familières aux géomètres, je me propose, dans une série d'articles, d'en donner des applications. Comme le but de ces articles est essentiellement didactique, je passe des applications les plus simples aux applications plus élevées. En me bornant, dans les premiers articles, à la Géométrie du plan, je vais donner successivement des applications

---

([1]) *Nouvelles Annales de Mathematiques*, 3e série, t. X, p. 219, 341, 345; 1891; t. XI, p. 8; 1892; t. XII, p. 65, 454; 1893.

([2]) *Journal de M. Kronecker*, t. XCII, p. 123, 1882; t. XCV, p. 36, 1883.

([3]) Voir *Journalde M. Kronecker*, t. XCIX, p. 128, 1885; *Comptes rendus*, t. CXII, p. 1356, 1891; *Bulletin de M. Darboux*, 2e série, t. XV, p. 308; 1891.

([4]) *Voir* l'intéressant Aperçu historique de M. V. Schlegel : *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den let zten fünfzig Jahren* (*Schlömilch's Zeitschrift. Hist. lit. Abth. Jahrgang* XLI, p. 41; 1896).

relatives aux *points*, aux *vecteurs* et aux *lignes droites*. Je commence par établir quelques définitions, dont j'ai besoin pour l'application en question, et je vais déduire plus tard toutes ces définitions d'une seule définition grassmannienne. Par cette manière de procéder, j'espère initier rapidement le lecteur, sans le fatiguer, aux principes des méthodes de Grassmann et lui en montrer la portée.

Centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone.

1. *Définitions.* — En représentant par des majuscules de l'alphabet latin $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... des *points*,

1° Le point $\mathfrak{M} = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ représente le milieu du segment $\mathfrak{AB}$;

2° Le point $\mathfrak{O} = \frac{\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B}}{\alpha + \beta}$ représente un point quelconque de la droite $\mathfrak{AB}$, α et β étant des paramètres quelconques;

3° Le point $\mathfrak{G} = \frac{1}{3}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})$ représente le centre de gravité du triangle homogène dont $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont les sommets;

4° La différence $\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ représente, en grandeur, sens et direction, le vecteur $\mathfrak{AB}$, issu de $\mathfrak{A}$ et finissant à $\mathfrak{B}$;

5° L'égalité $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \mathfrak{D} - \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ étant quatre points non situés sur la même droite, exprime : 1° que les deux vecteurs $\mathfrak{AB}$ et $\mathfrak{CD}$ sont égaux en grandeur; 2° qu'ils possèdent le même sens, de façon que les points $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sont leurs points d'origine, les points $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D}$ leurs points extrêmes; et, 3° que leurs directions sont parallèles.

Comme de l'égalité $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \mathfrak{D} - \mathfrak{C}$ se déduit

$\mathfrak{D} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{A}$, le point $\mathfrak{D}$ se construit en menant par $\mathfrak{C}$ une parallèle à $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ et en faisant $\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$; ou en menant par $\mathfrak{B}$ une parallèle à $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ et en faisant $\mathfrak{B}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$. Autrement le point $\mathfrak{D}$ se construit en menant par $\mathfrak{C}$ une parallèle à $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, et par $\mathfrak{B}$ une parallèle à $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$. Par conséquent le point $\mathfrak{D} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{A}$ est le quatrième sommet, opposé à $\mathfrak{A}$, d'un parallélogramme dont $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont les trois autres sommets.

A. *Centre de gravité d'un quadrilatère.*

2. Soient $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ les quatre sommets d'un quadrilatère quelconque; en le divisant par la diagonale $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4$ en deux triangles $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4$ dont les aires soient δ_1 et δ_3 et dont les centres de gravité sont (définition 3°) $\frac{1}{3}(\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4)$ et $\frac{1}{3}(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_4)$, le centre de gravité $\mathfrak{G}$ du quadrilatère $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ sera représenté par

$$\begin{aligned} 3(\delta_1 + \delta_3)\mathfrak{G} &= \delta_1(\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4) + \delta_3(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_4) \\ &= (\delta_1 + \delta_3)(\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_4) + \delta_1\mathfrak{A}_3 + \delta_3\mathfrak{A}_1 \\ &= (\delta_1 + \delta_3)(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4) - (\delta_1\mathfrak{A}_1 + \delta_3\mathfrak{A}_3). \end{aligned}$$

En divisant par $\delta_1 + \delta_3 = \delta$, δ étant l'aire du quadrilatère, et en posant

$$(1) \qquad \delta\mathfrak{O} = \delta_1\mathfrak{A}_1 + \delta_3\mathfrak{A}_3,$$

on obtient

$$(2) \qquad 3\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4 - \mathfrak{O}.$$

Si l'on divise le quadrilatère $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ par la diagonale $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$ en les deux triangles $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ dont les aires soient δ_2 et δ_4, dans les formules précédentes les indices 1 et 3 se changent en 2 et 4. Par ce changement, ni $\mathfrak{G}$, ni l'expression $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4$

ne changent. Par conséquent, et comme on a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4 = \delta$, la formule (1) prend la forme

$$(3) \qquad \delta \mathcal{O} = \delta_2 \mathcal{A}_2 + \delta_4 \mathcal{A}_4 \quad (^1).$$

Or la formule (1) exprime (définition 2°) que $\mathcal{O}$ est situé sur la diagonale $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3$; de même la formule (3) exprime que $\mathcal{O}$ est situé sur la diagonale $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_4$; donc $\mathcal{O}$ est le point d'intersection des deux diagonales $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_4$ du quadrilatère $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4$. En résumé :

I. *Si l'on désigne par* $\mathcal{G}$ *le centre de gravité d'un quadrilatère* $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4$ *et par* $\mathcal{O}$ *le point d'intersection des deux diagonales* $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3$ *et* $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_4$, *le point* $\mathcal{G}$ *s'exprime par la formule* (2)

$$(2) \qquad 3\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O}.$$

3. Pour construire cette formule, je vais étudier l'expression $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$.

Si l'on pose

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2\mathcal{M}_{12}, & \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = 2\mathcal{M}_{34}, \\ \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 2\mathcal{M}_{23}, & \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_1 = 2\mathcal{M}_{41}, \end{cases}$$

et

$$(5) \qquad \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 = 2\mathcal{M}_{13}, \qquad \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 = 2\mathcal{M}_{24},$$

les points $\mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{13}$, ... représentent les milieux des

---

(1) Des formules (1) et (3) on déduit immédiatement l'identité

$$\delta_1 \mathcal{A}_1 - \delta_2 \mathcal{A}_2 + \delta_3 \mathcal{A}_3 - \delta_4 \mathcal{A}_4 = 0,$$

qui met en évidence qu'il y a entre quatre points quelconques d'un plan une relation linéaire dont les coefficients $\delta_1, \ldots, \delta_4$, égaux respectivement aux aires des triangles $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4, \ldots, \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3$, sont liés par l'égalité

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0.$$

(2) *Voir* la Note de M. NOEGGERATH, *Archives de Grunert-Hoppe*, 1re série, t. LXV, p. 209; 1880.

côtés $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$, ... (définition 1°). Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3+\mathcal{A}_4 &= 2(\mathcal{M}_{12}+\mathcal{M}_{34})\\ &= 2(\mathcal{M}_{23}+\mathcal{M}_{41})\\ &= 2(\mathcal{M}_{13}+\mathcal{M}_{24}).\end{aligned}$$

En introduisant de plus le milieu $\mathcal{M}$ du segment $\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{34}$, on obtient

$$\mathcal{M}_{12}+\mathcal{M}_{34}=2\mathcal{M}$$

et, par conséquent,

$$(6)\qquad \begin{aligned}\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3+\mathcal{A}_4 &= 4\mathcal{M}\\ &= 2(\mathcal{M}_{12}+\mathcal{M}_{34})\\ &= 2(\mathcal{M}_{23}+\mathcal{M}_{41})\\ &= 2(\mathcal{M}_{13}+\mathcal{M}_{24});\end{aligned}$$

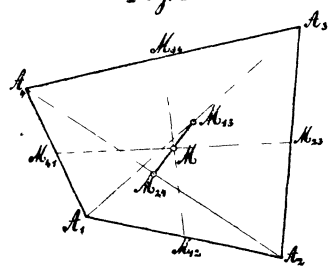
donc la formule (2) devient

$$(2^*)\qquad 3\mathcal{G}=4\mathcal{M}-\mathcal{O}.$$

4. En donnant au point $\mathcal{M}$, défini par les formules (6) le nom de *point moyen* du quadrilatère, on tire des formules (6) la construction suivante :

II. *Construction du point moyen d'un quadrilatère* (*fig.* 1). — *Si l'on désigne par* $\mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{34}$; $\mathcal{M}_{23}$, $\mathcal{M}_{41}$

Fig. 1.



les milieux des côtés opposés $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$; $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4\mathcal{A}_1$ *d'un quadrilatère* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ *et par* $\mathcal{M}_{13}$, $\mathcal{M}_{24}$

les milieux des deux diagonales $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$, *les trois segments* $\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}_{34}$, $\mathfrak{M}_{23}\mathfrak{M}_{41}$, $\mathfrak{M}_{13}\mathfrak{M}_{24}$ *possèdent le même milieu* $\mathfrak{M}$ *qui est le point moyen du quadrilatère.*

5. Ceci établi, la formule (2*) exprime (définition 2°) que le centre de gravité $\mathcal{G}$, le point moyen $\mathfrak{M}$ et le point d'intersection $\mathcal{O}$ des deux diagonales d'un quadrilatère sont situés sur la même droite. Comme de plus la formule (2*) se change immédiatement en

$$3(\mathcal{G} - \mathfrak{M}) = \mathfrak{M} - \mathcal{O},$$

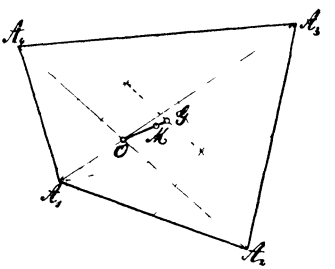
d'où suit

$$3\mathfrak{M}\mathcal{G} = \mathcal{O}\mathfrak{M},$$

on obtient :

III. *Première construction du centre de gravité* (¹) (*fig.* 2). — *Dans un quadrilatère quelconque soit* $\mathcal{O}$

Fig. 2.



le point d'intersection des deux diagonales et $\mathfrak{M}$ *le point moyen; en joignant les points* $\mathcal{O}$ *et* $\mathfrak{M}$ *par une droite et en faisant* $\mathfrak{M}\mathcal{G} = \frac{1}{3}\mathcal{O}\mathfrak{M}$, *le point* $\mathcal{G}$ *sera le centre de gravité du quadrilatère.*

(¹) *Voir* les Notes de M. Stoll (*Archives de Grunert-Hoppe*, 1re série, t. LXV, p. 445; 1880; 2e série, t. I, p. 334; 1884; *Hoffmann's Zeitschrift fur math. und naturw. Unterricht*, t. XIII, p. 119; 1882).

6. Au moyen des formules (4), la formule (2) prend la forme

$$\begin{aligned} 3\mathcal{G} &= 2\mathfrak{M}_{12} + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O} \\ &= 2\mathfrak{M}_{23} + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_1 - \mathcal{O}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on pose

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{12}, & \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{34}, \\ \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_1 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{23}, & \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{41} \end{cases}$$

et

$$(8)\quad \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{13}, \qquad \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{24},$$

on obtient

$$(9)\quad \begin{cases} 3\mathcal{G} = 2\mathfrak{M}_{12} + \mathfrak{M}'_{12} \\ \phantom{3\mathcal{G}} = 2\mathfrak{M}_{23} + \mathfrak{M}'_{23} \\ \phantom{3\mathcal{G}} = 2\mathfrak{M}_{34} + \mathfrak{M}'_{34} \\ \phantom{3\mathcal{G}} = 2\mathfrak{M}_{41} + \mathfrak{M}'_{41} \end{cases}$$

et

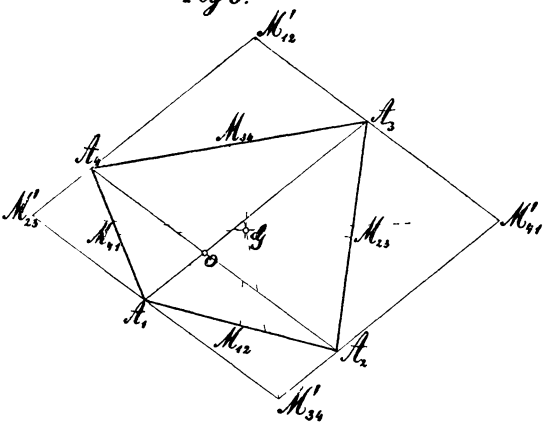
$$(10)\quad \begin{cases} 3\mathcal{G} = 2\mathfrak{M}_{13} + \mathfrak{M}'_{13} \\ \phantom{3\mathcal{G}} = 2\mathfrak{M}_{24} + \mathfrak{M}'_{24}. \end{cases}$$

D'après la construction qui découle de la définition 5°, le point $\mathfrak{M}'_{12}$ est le quatrième sommet d'un parallélogramme dont $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{O}$ sont les trois autres sommets. Comme $\mathfrak{M}'_{12}$ est opposé à $\mathcal{O}$, on obtient le point $\mathfrak{M}'_{12}$ en menant par $\mathcal{A}_3$ une parallèle à $\mathcal{O}\mathcal{A}_4$ et par $\mathcal{A}_4$ une parallèle à $\mathcal{O}\mathcal{A}_3$. Or, le point $\mathcal{O}$ est situé sur les deux diagonales $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$; par conséquent $\mathfrak{M}'_{12}$ est le point d'intersection des deux parallèles, menées respectivement par $\mathcal{A}_3$ à $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ et par $\mathcal{A}_4$ à $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$. Donc les formules (7) fournissent :

IV. *Construction des points* $\mathfrak{M}'_{12}$, $\mathfrak{M}'_{23}$, $\mathfrak{M}'_{34}$, $\mathfrak{M}'_{41}$ (*fig.* 3). — *Si l'on mène par les sommets opposés* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_3$ *d'un quadrilatère* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ *deux parallèles à la diagonale* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ *et par les deux autres sommets*

opposés $\mathcal{A}_2$ *et* $\mathcal{A}_4$ *deux autres parallèles à la diagonale* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$, *on obtient un parallélogramme dont*

Fig 3.



$\mathfrak{M}'_{12}$, $\mathfrak{M}'_{23}$, $\mathfrak{M}'_{34}$, $\mathfrak{M}'_{41}$ *sont les sommets, et où le point* $\mathfrak{M}'_{12}$ *est le point d'intersection des parallèles, menées par* $\mathcal{A}_3$ *et* $\mathcal{A}_4$, *etc.*

7. Comme les formules (9) prennent aussi la forme

$$2(\mathcal{G} - \mathfrak{M}_{12}) = \mathfrak{M}'_{12} - \mathcal{G}. \qquad \ldots,$$

d'où suit

$$2\mathfrak{M}_{12}\mathcal{G} = \mathcal{G}\mathfrak{M}'_{12}, \qquad \ldots,$$

on a :

V. *Deuxième et troisième constructions du centre de gravité* (¹) (*fig.* 3). — *Le centre de gravité* $\mathcal{G}$ *est le point d'intersection des quatre segments* $\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}'_{12}$, $\mathfrak{M}_{23}\mathfrak{M}'_{23}$, $\mathfrak{M}_{34}\mathfrak{M}'_{34}$, $\mathfrak{M}_{41}\mathfrak{M}'_{41}$.

(¹) *Voir* EDMOND HENRY : *Sur l'extension au quadrilatere d'une propriete analogue a celle des medianes d'un triangle* (*Revue scientifique*, t XLVII, p 731, 1891)

Le point $\mathcal{G}$ *divise chacun de ces quatre segments dans le rapport* $1:2$, *de façon que* $\mathfrak{M}_{12}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{12}$, $\mathfrak{M}_{23}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{23}$, *etc.*

8. Les points $\mathfrak{M}'_{13}$ et $\mathfrak{M}'_{24}$, définis par les formules (8), se construisent encore plus facilement que les points $\mathfrak{M}'_{12}, \ldots, \mathfrak{M}'_{41}$.

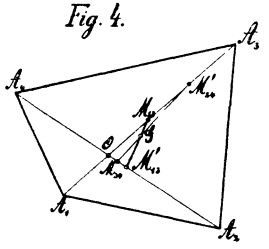
Comme le point $\mathcal{O}$ est situé sur $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$, la première formule (8) $\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{13}$ exprime que le point $\mathfrak{M}'_{13}$ a la même distance du point $\mathcal{A}_2$ que le point $\mathcal{O}$ du point $\mathcal{A}_4$. De même, la seconde formule (8)

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{24}$$

exprime que $\mathfrak{M}'_{24}\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1\mathcal{O}$. Au moyen des points $\mathfrak{M}'_{13}$ et $\mathfrak{M}'_{24}$, des formules (10) résulte :

VI. *Quatrième et cinquième constructions du centre de gravité* (¹) (*fig.* 4). — *Soit, dans un quadrilatère*

Fig. 4.



$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$, $\mathcal{O}$ *le point d'intersection des deux diagonales* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$ *et* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ *dont* $\mathfrak{M}_{13}$ *et* $\mathfrak{M}_{24}$ *sont les milieux. Si l'on construit sur la diagonale* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$ *le point* $\mathfrak{M}'_{24}$, *et sur la diagonale* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ *le point* $\mathfrak{M}'_{13}$, *de façon que* $\mathcal{A}_1\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{24}\mathcal{A}_3$ *et* $\mathcal{A}_4\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{13}\mathcal{A}_2$, *le*

(¹) *Voir*, par exemple, CH. DELAUNAY, *Traité de Mécanique rationnelle*. Paris, 1878; 6ᵉ édit., p. 275.

centre de gravité $\mathcal{G}$ *est le point d'intersection des deux segments* $\mathfrak{M}_{13}\mathfrak{M}'_{13}$ *et* $\mathfrak{M}_{24}\mathfrak{M}'_{24}$.

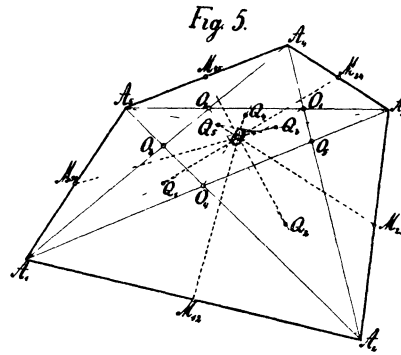
Le point $\mathcal{G}$ *divise chacun de ces deux segments dans le rapport* 1 : 2, *de façon que* $\mathfrak{M}_{13}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{13}$ *et* $\mathfrak{M}_{24}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{24}$.

B *Centre de gravité d'un pentagone.*

9. Le centre de gravité d'un pentagone se calcule et se construit de la même manière que le centre de gravité d'un quadrilatère.

Le pentagone quelconque $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ (*fig.* 5) soit divisé par la diagonale $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4$ en le quadrilatère

Fig. 5.



$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ et en le triangle $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ dont les aires soient respectivement Δ_5 et Δ_{23}.

D'après la formule (2) le centre de gravité du quadrilatère $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ s'exprime par

$$\tfrac{1}{3}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O}_5),$$

$\mathcal{O}_5$ étant le point d'intersection des deux diagonales $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$. Comme, de plus, le centre de gravité du triangle $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ est représenté par $\frac{1}{3}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5)$,

le centre de gravité du pentagone $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ est exprimé par la formule

$$\begin{aligned}3(\Delta_5+\Delta_{23})\mathcal{G} &= \Delta_5(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3+\mathcal{A}_4-\mathcal{O}_5)\\ &\quad+\Delta_{23}(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_4+\mathcal{A}_5)\\ &= (\Delta_5+\Delta_{23})(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3+\mathcal{A}_4+\mathcal{A}_5)\\ &\quad-\{\Delta_5(\mathcal{A}_5+\mathcal{O}_5)+\Delta_{23}(\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3)\}.\end{aligned}$$

En posant, d'après la formule (4),

$$\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3=2\mathcal{M}_{23}$$

et, de même,

$$\mathcal{A}_5+\mathcal{O}_5=2\mathcal{Q}_5,$$

$\mathcal{Q}_5$ étant le milieu du segment $\mathcal{A}_5\mathcal{O}_5$, l'expression

$$\Delta_5(\mathcal{A}_5+\mathcal{O}_5)+\Delta_{23}(\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3)$$

devient

$$2(\Delta_5\mathcal{Q}_5+\Delta_{23}\mathcal{M}_{23}).$$

Si l'on définit le point $\mathcal{O}$, par l'égalité

$$(11)\qquad (\Delta_5+\Delta_{23})\mathcal{O}=\Delta_5\mathcal{Q}_5+\Delta_{23}\mathcal{M}_{23}.$$

et si l'on divise l'expression de $\mathcal{G}$ par $\Delta_5+\Delta_{25}=\Delta$, Δ étant l'aire du pentagone $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$, on obtient

$$(12)\qquad 3\mathcal{G}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3+\mathcal{A}_4+\mathcal{A}_5-2\mathcal{O}.$$

10. En divisant le pentagone $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ par une autre diagonale que $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4$, savoir $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_4\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_5\mathcal{A}_3$, ni $\mathcal{G}$, ni $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3+\mathcal{A}_4+\mathcal{A}_5$ ne changent; par conséquent, l'expression de $\mathcal{O}$, définie par l'égalité (11), reste la même, si l'on y change, d'une façon cyclique, les indices inférieurs. Or la formule (11) met en évidence que le point $\mathcal{O}$ est situé sur la droite $\mathcal{Q}_5\mathcal{M}_{23}$; donc ce point est situé aussi sur les droites $\mathcal{Q}_1\mathcal{M}_{34}$, $\mathcal{Q}_2\mathcal{M}_{45}$, $\mathcal{Q}_3\mathcal{M}_{51}$, $\mathcal{Q}_4\mathcal{M}_{12}$. D'où résulte :

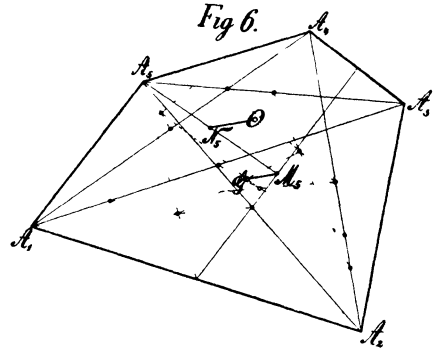
VII. *Si l'on désigne (fig. 5) par*

$$\mathcal{O}_1, \quad \mathcal{O}_2, \quad \mathcal{O}_3, \quad \mathcal{O}_4; \quad \mathcal{O}_5,$$

les points d'intersection des diagonales

$$\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3\mathcal{A}_5, \quad \mathcal{A}_3\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_4\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_4\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_5\mathcal{A}_2,$$
$$\mathcal{A}_5\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1\mathcal{A}_3, \quad \mathcal{A}_1\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2\mathcal{A}_4,$$

par $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots, \mathcal{Q}_5$ *les milieux des segments* $\mathcal{A}_1\mathcal{O}_1$, $\mathcal{A}_2\mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{A}_5\mathcal{O}_5$; *par* $\mathcal{M}_{12}, \mathcal{M}_{23}, \ldots, \mathcal{M}_{51}$ *les mi-*



lieux des côtés $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2\mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_5\mathcal{A}_1$, *les cinq segments* $\mathcal{Q}_1\mathcal{M}_{34}, \mathcal{Q}_2\mathcal{M}_{45}, \ldots, \mathcal{Q}_5\mathcal{M}_{23}$ *ont le même point d'intersection* $\mathcal{O}$.

VIII. *Au moyen de ce point* $\mathcal{O}$, *le centre de gravité* $\mathcal{G}$ *d'un pentagone quelconque* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ *s'exprime par la formule*

$$(12) \qquad 3\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 - 2\mathcal{O}.$$

11. Pour construire cette expression, je rappelle que l'on a, d'après la formule (6)

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = 4\mathcal{M}_5,$$

$\mathfrak{M}_5$ étant le point moyen du quadrilatère $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$. Par conséquent, la formule (12) devient

$$3\mathfrak{G} = 4\mathfrak{M}_5 + \mathfrak{A}_5 - 2\mathfrak{O}.$$

Si l'on pose

$$\mathfrak{M}_5 + \mathfrak{A}_5 = 2\mathfrak{N}_5,$$

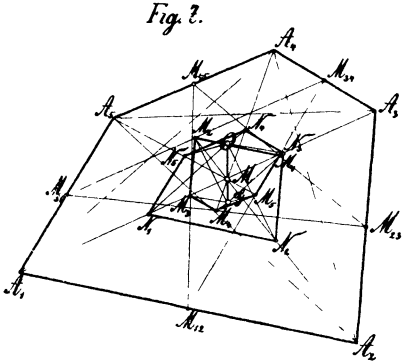
on en tire

$$3(\mathfrak{G} - \mathfrak{M}_5) = 2(\mathfrak{N}_5 - \mathfrak{O}).$$

De là résultent les constructions suivantes :

Première et deuxième constructions du centre de gravité d'un pentagone (voir *fig.* 6 *et fig.* 7).

Fig. 7.



IX. *Soient* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_5$ *les points moyens des quadrilatères* $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_1$, ..., $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$, *en lesquels les diagonales* $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1$, ..., $\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1$ *partagent le pentagone* $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_5$; *soient, de plus,* $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_5$ *les milieux des segments* $\mathfrak{A}_1\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{M}_2$, ..., $\mathfrak{A}_5\mathfrak{M}_5$; *soit enfin* $\mathfrak{O}$ *le point défini par le théorème VII :*

Si l'on mène par les points $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_5$ *des parallèles aux segments* $\mathfrak{O}\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{O}\mathfrak{N}_2$, ..., $\mathfrak{O}\mathfrak{N}_5$, *les cinq parallèles concourent en le même point* $\mathfrak{G}$, *centre de gravité du pentagone.*

X. *Le point* $\mathcal{G}$ *est situé sur chacune de ces cinq parallèles, de façon que*

$$\mathfrak{M}_i\mathcal{G} = \tfrac{2}{3}\,\mathcal{O}\mathfrak{N}_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

12. Comme on a

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 \\ &\quad = 4\,\mathfrak{M}_i + \mathcal{A}_i = 3\,\mathfrak{M}_i + 2\,\mathfrak{N}_i = 5\,\mathfrak{M} \\ &\qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \end{aligned}$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned} 4\,\mathfrak{M}_i + \mathcal{A}_i &= 4\,\mathfrak{M}_k + \mathcal{A}_k \\ 3\,\mathfrak{M}_i + 2\,\mathfrak{N}_i &= 3\,\mathfrak{M}_k + 2\,\mathfrak{N}_k \end{aligned}\right\} (i, k = 1, 2, 3, 4, 5);$$

par conséquent,

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} 4(\mathfrak{M}_i - \mathfrak{M}_k) &= \mathcal{A}_k - \mathcal{A}_i, \\ 3(\mathfrak{M}_i - \mathfrak{M}_k) &= 2(\mathfrak{N}_k - \mathfrak{N}_i). \end{aligned}\right.$$

Donc on a les théorèmes suivants (*fig.* 7) :

XI. *Les points moyens* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_5$ *des quadrilatères* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$, *en lesquels les diagonales* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_4\mathcal{A}_1$ *partagent le pentagone* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ *forment un pentagone* $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_4\mathfrak{M}_5$ *dont les côtés* $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$, ..., $\mathfrak{M}_5\mathfrak{M}_1$ *sont parallèles et de sens opposé aux côtés* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, ..., $\mathcal{A}_5\mathcal{A}_1$.

Le rapport de $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 : \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 : \mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, *etc. est égal à* $1 : 4$.

XII. *De même les points* $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_5$, *milieux des segments* $\mathcal{A}_1\mathfrak{M}_1$, $\mathcal{A}_2\mathfrak{M}_2$, ..., $\mathcal{A}_5\mathfrak{M}_5$, *forment un autre pentagone* $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_4\mathfrak{N}_5$ *dont les côtés sont eux-mêmes parallèles, dans le même sens, aux côtés du pentagone* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \ldots \mathcal{A}_5$ *et parallèles, mais de sens opposé, à ceux du pentagone* $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_5$.

Le rapport de $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 : \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_3 : \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$, ...

est égal à 3 : 2 *et le rapport de* $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 : \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 : \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, ... *est égal à* 3 : 8.

XIII. *Les cinq droites* $\mathfrak{A}_i\mathfrak{M}_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ *concourent en le même point*

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{5}(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_5),$$

point moyen du pentagone $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_5$.

XIV. *Le point moyen* $\mathfrak{M}$ *est le centre de similitude des pentagones* $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_5$; $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_5$; $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 \ldots \mathfrak{N}_5$.

13. Au moyen du point $\mathfrak{M}$, la formule (12) devient

$$(12^*) \qquad 3\mathfrak{G} = 5\mathfrak{M} - 2\mathfrak{O}.$$

De cette expression, tout à fait analogue à l'expression (2^*) pour le quadrilatère, on déduit

$$3(\mathfrak{G} - \mathfrak{M}) = 2(\mathfrak{M} - \mathfrak{O})$$

et, par conséquent,

$$3\mathfrak{M}\mathfrak{G} = 2\mathfrak{O}\mathfrak{M}.$$

Donc on obtient :

XV. *Troisième construction du centre de gravité d'un pentagone (fig. 7).*

Dans un pentagone quelconque, soient $\mathfrak{O}$ *le point défini par le théorème VII,* $\mathfrak{M}$ *le point moyen défini par le théorème XIII; en joignant les points* $\mathfrak{O}$ *et* $\mathfrak{M}$ *par une droite et en faisant* $\mathfrak{M}\mathfrak{G} = \frac{2}{3}\mathfrak{O}\mathfrak{M}$, *le point* $\mathfrak{G}$ *sera le centre de gravité du pentagone.*

14. Si l'on pose

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = 2\mathfrak{M}_{12}, & \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_5 - 2\mathfrak{O} = \mathfrak{M}'_{12}, \\ \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 = 2\mathfrak{M}_{23}, & \mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_5 + \mathfrak{A}_1 - 2\mathfrak{O} = \mathfrak{M}'_{23}, \\ \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4 = 2\mathfrak{M}_{34}, & \mathfrak{A}_5 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 - 2\mathfrak{O} = \mathfrak{M}'_{34}, \\ \mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_5 = 2\mathfrak{M}_{45}, & \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 - 2\mathfrak{O} = \mathfrak{M}'_{45}, \\ \mathfrak{A}_5 + \mathfrak{A}_1 = 2\mathfrak{M}_{51}, & \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4 - 2\mathfrak{O} = \mathfrak{M}'_{51} \end{array} \right.$$

et, d'une façon analogue,

$$(15)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 = 2\mathfrak{M}_{13}, & \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{13}, \\ \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 = 2\mathfrak{M}_{24}, & \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_1 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{24}, \\ \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_5 = 2\mathfrak{M}_{35}, & \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{35}, \\ \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_1 = 2\mathfrak{M}_{41}, & \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{41}, \\ \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_2 = 2\mathfrak{M}_{52}, & \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{52}; \end{cases}$$

la formule (12) se change en l'égalité

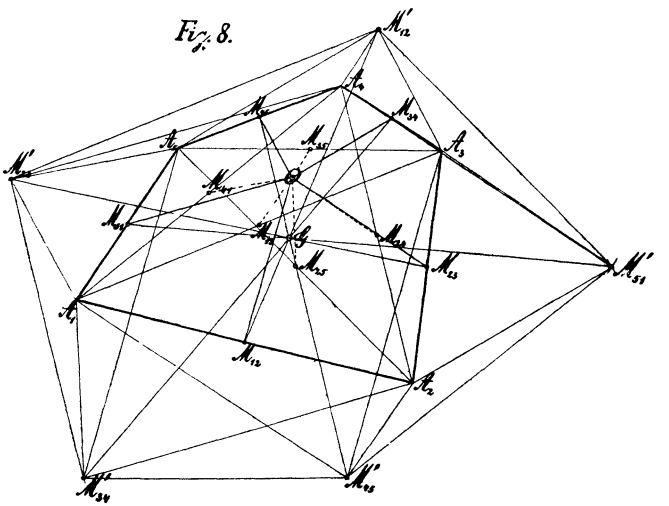
$$(16)\qquad 3\mathcal{G} = 2\mathfrak{M}_{ik} - \mathfrak{M}'_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5;\ i \neq k),$$

qui représente dix formules différentes.

15. Pour construire les points $\mathfrak{M}'_{12}, \mathfrak{M}'_{23}, \ldots, \mathfrak{M}'_{51}$; $\mathfrak{M}'_{13}, \mathfrak{M}'_{24}, \ldots, \mathfrak{M}'_{52}$, je fais remarquer que les formules (14) et (15) prennent la forme commune

$$(17)\quad \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_k = 2\mathfrak{M}_{ik}, \qquad \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_n - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{ik}.$$

Fig. 8.



où les cinq indices i, k, l, m, n désignent, dans un ordre quelconque, les cinq indices 1, 2, 3, 4, 5.

Comme des expressions (17) découle immédiatement

$$(18)\qquad \begin{cases} 2(\mathfrak{M}_{mn} - \mathfrak{O}) = \mathfrak{M}'_{ik} - \mathfrak{A}_l, \\ 2(\mathfrak{M}_{nl} - \mathfrak{O}) = \mathfrak{M}'_{ik} - \mathfrak{A}_m, \\ 2(\mathfrak{M}_{lm} - \mathfrak{O}) = \mathfrak{M}'_{ik} - \mathfrak{A}_n, \end{cases}$$

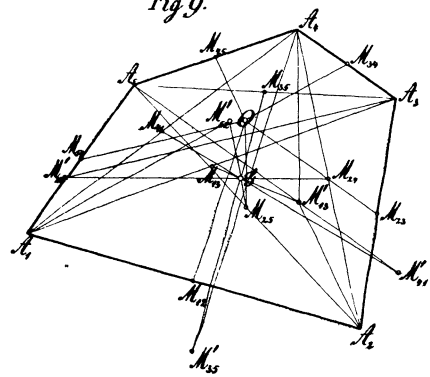
on a :

Deux constructions des points $\mathfrak{M}'_{12}$, $\mathfrak{M}'_{23}$, ..., $\mathfrak{M}'_{51}$; $\mathfrak{M}'_{13}$, $\mathfrak{M}'_{24}$, ..., $\mathfrak{M}'_{52}$ (voir *fig.* 7 et *fig.* 8).

XVI. *Soient* i, k, l, m, n *cinq indices différents, désignant, dans un ordre quelconque, les indices* 1, 2, 3, 4, 5 ; *soient, de plus,* $\mathfrak{M}_{mn}$, $\mathfrak{M}_{nl}$, $\mathfrak{M}_{lm}$ *les milieux des côtés* $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_m$ *du pentagone* $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_5$; *soit enfin* $\mathfrak{O}$ *le point défini par le théorème VII : Si l'on mène par les sommets* $\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{A}_n$ *du pentagone des parallèles respectivement aux segments* $\mathfrak{O}\mathfrak{M}_{mn}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{M}_{nl}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{M}_{lm}$, *ces parallèles concourent au point* $\mathfrak{M}'_{ik}$.

XVII. *Le point* $\mathfrak{M}'_{ik}$ *est situé sur ces parallèles de*

Fig 9.



façon que $\mathfrak{A}_l\mathfrak{M}'_{ik} = 2\,\mathfrak{O}\mathfrak{M}_{mn}$, $\mathfrak{A}_m\mathfrak{M}'_{ik} = 2\,\mathfrak{O}\mathfrak{M}_{nl}$, $\mathfrak{A}_n\mathfrak{M}'_{ik} = 2\,\mathfrak{O}\mathfrak{M}_{lm}$.

Pour $i = 1$, $k = 2$, $l = 3$, $m = 4$, $n = 5$, la *fig.* 8 et, pour $i = 1$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$, $n = 5$, la *fig.* 9 montrent les constructions précédentes.

Dans la *fig.* 8, par les sommets $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$, des parallèles sont menées respectivement aux segments $\mathcal{O}\mathcal{M}_{45}$, $\mathcal{O}\mathcal{M}_{35}$, $\mathcal{O}\mathcal{M}_{34}$; leur point d'intersection est le point $\mathcal{M}'_{12}$. De plus on voit que $\mathcal{A}_3\mathcal{M}'_{12} = 2\mathcal{O}\mathcal{M}_{45}$, $\mathcal{A}_4\mathcal{M}'_{12} = 2\mathcal{O}\mathcal{M}_{35}$, $\mathcal{A}_5\mathcal{M}'_{12} = 2\mathcal{O}\mathcal{M}_{34}$.

De même, dans la *fig.* 9, par les sommets $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$, des parallèles sont menées respectivement aux segments $\mathcal{O}\mathcal{M}_{45}$, $\mathcal{O}\mathcal{M}_{25}$, $\mathcal{O}\mathcal{M}_{24}$; leur point d'intersection est le point $\mathcal{M}'_{13}$. De plus on voit que

$$\mathcal{A}_2\mathcal{M}'_{13} = 2\mathcal{O}\mathcal{M}_{45}, \qquad \mathcal{A}_4\mathcal{M}'_{13} = 2\mathcal{O}\mathcal{M}_{25}.$$
$$\mathcal{A}_5\mathcal{M}'_{13} = 2\mathcal{O}\mathcal{M}_{24}.$$

16. Les points $\mathcal{M}'_{12}$, $\mathcal{M}'_{23}$, ..., $\mathcal{M}'_{51}$; $\mathcal{M}'_{13}$, $\mathcal{M}'_{24}$, ..., $\mathcal{M}'_{52}$ sont liés aux points $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_5$ par de simples relations qui ramènent leur construction à la construction d'un seul point d'entre eux.

En effet, si l'on échange, dans la formule (17)

$$\mathcal{A}_l + \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_n - 2\mathcal{O} = \mathcal{M}'_{ik}$$

les indices k et l, on obtient

$$\mathcal{A}_k + \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_n - 2\mathcal{O} = \mathcal{M}'_{il}.$$

et, par soustraction,

$$\mathcal{M}'_{ik} - \mathcal{M}'_{il} = \mathcal{A}_l - \mathcal{A}_k, \tag{19}$$

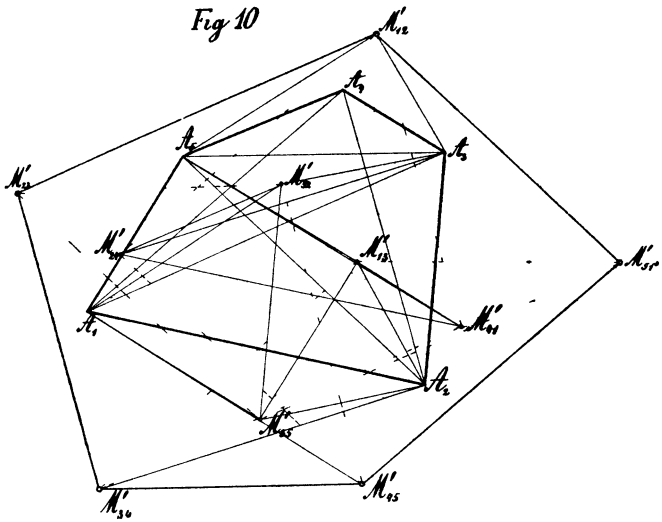
d'où il suit que les segments $\mathcal{M}'_{il}\mathcal{M}'_{ik}$ sont parallèles et égaux aux segments $\mathcal{A}_k\mathcal{A}_l$.

Par conséquent on obtient comme corollaires les deux théorèmes :

XVIII. *Dans le pentagone* $\mathcal{M}'_{12}\mathcal{M}'_{23}\mathcal{M}'_{34}\mathcal{M}'_{45}\mathcal{M}'_{51}$ (*fig.* 10), *les côtés* $\mathcal{M}'_{12}\mathcal{M}'_{23}$, $\mathcal{M}'_{23}\mathcal{M}'_{34}$, ..., $\mathcal{M}'_{51}\mathcal{M}'_{12}$

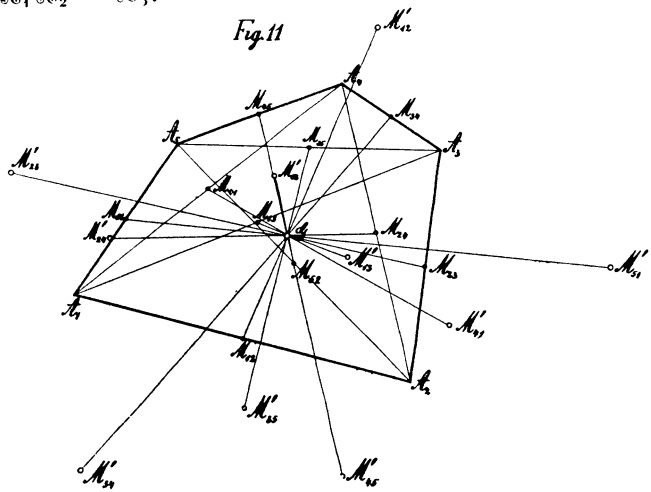
sont égaux et parallèles respectivement aux diago-

Fig 10



nales A_3A_1, A_1A_2, ., A_2A_5 *du pentagone* A_1A_2 A_5.

Fig. 11



XIX. *Dans le pentagone* $\mathfrak{M}'_{13}, \mathfrak{M}'_{24}, \mathfrak{M}'_{35}, \mathfrak{M}'_{41}, \mathfrak{M}'_{52}$

(*fig.* 11), *les diagonales* $\mathfrak{M}'_{24}\mathfrak{M}'_{41}$, $\mathfrak{M}'_{35}\mathfrak{M}'_{52}$, ..., $\mathfrak{M}'_{13}\mathfrak{M}'_{35}$ *sont égales et parallèles respectivement aux côtés* $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, ..., $\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_1$ *du pentagone* $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_5$.

D'après la formule (19) on a aussi

$$(20) \qquad \mathfrak{M}'_{ik} - \mathfrak{M}'_{lm} = \mathfrak{M}'_{lk} - \mathfrak{M}'_{lm} = \mathfrak{A}_m - \mathfrak{A}_k,$$

et comme $\mathfrak{M}'_{lk} = \mathfrak{M}'_{kl}$, $\mathfrak{M}'_{lm} = \mathfrak{M}'_{ml}$, on obtient :

XX. *Si l'on désigne par* i, k, l, m *quatre indices quelconques parmi les cinq indices* 1, 2, 3, 4, 5, *les quatre points*

$$\mathfrak{M}'_{ik}, \quad \mathfrak{M}'_{kl}, \quad \mathfrak{M}'_{lm}, \quad \mathfrak{M}'_{mi}$$

forment les quatre sommets d'un parallélogramme.

Donc :

XXI. *Si parmi les dix points* $\mathfrak{M}'_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$ *un seul est donné, les autres se construisent au moyen des parallélogrammes.*

Comme la formule (20) prend aussi la forme

$$(21) \qquad \mathfrak{M}'_{ik} - \mathfrak{A}_m = \mathfrak{M}'_{im} - \mathfrak{A}_k,$$

on a :

XXII. *Les segments*

$$\mathfrak{A}_m\mathfrak{M}'_{ik} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_k\mathfrak{M}'_{im} \qquad (i, k, m = 1, 2, 3, 4, 5;\ i \neq k \neq m),$$

formés par les sommets des pentagones $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_5$; $\mathfrak{M}'_{12}\mathfrak{M}'_{23} \ldots \mathfrak{M}'_{51}$; $\mathfrak{M}'_{13}\mathfrak{M}'_{24}$, ..., $\mathfrak{M}'_{52}$ *sont égaux et parallèles.*

17. Dans la *fig.* 10, sont illustrées quelques-unes des propriétés, établies par les théorèmes XX, XXI, XXII.

En effet, la *fig.* 10 met en évidence :

1° Que les sommets

$$\mathfrak{M}'_{12}\mathfrak{M}'_{24}\mathfrak{M}'_{45}\mathfrak{M}'_{51}; \qquad \mathfrak{M}'_{23}\mathfrak{M}'_{34}\mathfrak{M}'_{45}\mathfrak{M}'_{52};$$
$$\mathfrak{M}'_{13}\mathfrak{M}'_{34}\mathfrak{M}'_{45}\mathfrak{M}'_{51}; \qquad \mathfrak{M}'_{23}\mathfrak{M}'_{35}\mathfrak{M}'_{51}\mathfrak{M}'_{12};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

forment des parallélogrammes;

2° Que les segments (côtés ou diagonales)

$$\mathfrak{M}'_{13}\mathfrak{M}'_{23}, \quad \mathfrak{M}'_{41}\mathfrak{M}'_{24}, \quad \mathfrak{M}'_{51}\mathfrak{M}'_{52}, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2;$$
$$\mathfrak{M}'_{24}\mathfrak{M}'_{34}, \quad \mathfrak{M}'_{52}\mathfrak{M}'_{35}, \quad \mathfrak{M}'_{12}\mathfrak{M}'_{13}, \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3;$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$
$$\mathfrak{M}'_{23}\mathfrak{M}'_{12}, \quad \mathfrak{M}'_{34}\mathfrak{M}'_{41}, \quad \mathfrak{M}'_{35}\mathfrak{M}'_{51}, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3;$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

sont égaux et parallèles;

3° Que les segments

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{M}'_{34}, \quad \mathfrak{A}_3\mathfrak{M}'_{24}; \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{M}'_{13}, \quad \mathfrak{A}_3\mathfrak{M}'_{12}; \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{M}'_{35}, \quad \mathfrak{A}_3\mathfrak{M}'_{52};$$
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{M}'_{52}, \quad \mathfrak{A}_5\mathfrak{M}'_{12}; \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{M}'_{35}, \quad \mathfrak{A}_5\mathfrak{M}'_{13}; \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{M}'_{45}, \quad \mathfrak{A}_5\mathfrak{M}'_{41};$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

sont égaux et parallèles.

18. Après avoir construit les points $\mathfrak{M}'_{ik}$, on déduit de la formule (16) :

Quatrième et cinquième constructions du centre de gravité d'un pentagone (1) (*fig.* 11).

XXIII. *Le centre de gravité* $\mathcal{G}$ *est le point d'intersection des dix segments* $\mathfrak{M}_{ik}\mathfrak{M}'_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$.

---

(1) *Voir* la Note de M. J. Gysel : *Sur la construction du centre de gravité d'un polygone plan homogène* (*Archives des Sciences physiques et naturelles*, 3e période, t. XXXII, p. 275; Genève, 1894); ainsi que le Mémoire du même auteur : *Zur Konstruktion des Schwerpunktes einer ebenen Vielecksfläche*, Beilage zum *Jahresbericht des Gymnasiums Schaffhausen für* 1894-1895.

XXIV. *Le point* $\mathcal{G}$ *divise les dix segments* $\mathfrak{M}_{ik}\mathfrak{M}'_{ik}$ *dans le rapport* $1:2$, *de façon que* $\mathfrak{M}_{ik}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{ik}$.

En terminant cet article, relatif aux *points*, je fais encore remarquer que les points $\mathcal{O}_i$, $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{Q}_i$, $\mathfrak{M}_{ik}$, $\mathfrak{M}'_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5;\ i \neq k)$, $\mathcal{O}$, $\mathfrak{M}$, $\mathcal{G}$, introduits pour les différentes constructions du centre de gravité, sont liés par bien d'autres relations. Je laisse au lecteur le soin de les établir, à titre d'exemples. Je passerai, dans un deuxième Article, aux applications relatives aux *vecteurs*.