H.-E. Timerding

Sur une certaine famille de courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 351-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__351_1>

[P1b]

SUR UNE CERTAINE FAMILLE DE COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. H.-E. TIMERDING.

1. Étant donnés sur une droite trois points fixes A, B, N et un point variable P, nous cherchons un autre point Q de la droite tel que le rapport anharmonique que Q et P forment avec A et B soit égal à celui que P et N forment avec A et B. Cherchons ensuite le point R

tel que le rapport anharmonique de R et Q avec A et B soit égal à celui de Q et P avec A et B, et continuons ainsi. Nous parviendrons de cette manière à une série de points P, Q, R, ... que nous appelons *points-puissances* du premier d'entre eux par rapport aux points fixes A, B, N. Le point qui est dans cette série à la $n^{\text{ième}}$ place sera le $n^{\text{ième}}$ point-puissance de P, et n sera son exposant.

Soit α le rapport anharmonique des quatre premiers points P, N; A, B. Nous aurons, selon l'hypothèse,

$$\frac{QA}{QB} : \frac{NA}{NB} = \left(\frac{QA}{QB} : \frac{PA}{PB}\right)\left(\frac{PA}{PB} : \frac{NA}{NB}\right) = \alpha^2,$$

et, de la même manière,

$$\frac{RA}{RB} : \frac{NA}{NB} = \alpha^3, \quad .$$

Les rapports anharmoniques que les points-puissances P, Q, R, ... forment avec les points fixes N, A, B s'expriment donc par les puissances du rapport anharmonique du premier point P avec les mêmes points fixes. C'est ainsi que la désignation de ces points est justifiée.

Pour étendre cette définition des puissances géométriques aux points d'un plan, nous prenons arbitrairement dans ce plan quatre points A, B, C, O. Les trois premiers forment le triangle de référence Δ, le quatrième est considéré comme le *point-unité*.

Nous joignons ce dernier aux points A, B, C par des lignes droites qui coupent les côtés opposés du triangle Δ respectivement en L, M, N. Faisons de même pour un point quelconque P, et soient les points alors correspondants à L, M, N désignés par P′, P″, P‴. Si nous cherchons les points-puissances de ces derniers points sur les côtés du triangle Δ de la manière que nous venons d'exposer, en remplaçant les points fondamentaux A, B, N une fois par C, A, M et une fois par B, C, L les lignes qui joignent trois points-puissances correspondant aux sommets opposés du triangle Δ se couperont en un seul et même point, et ce point sera le $n^{\text{ième}}$ point-puissance du point P par rapport au triangle Δ et au point-unité O.

Une série de points-puissances passe dans une série de la même nature, si nous transformons le plan par une homographie quelconque, pourvu que les points de référence soient remplacés par leurs points transformés respectifs. Pour cette raison, nous pouvons nommer les points-puissances puissances homographiques du point qui est leur base.

2. A un point proposé appartient un seul point qui en est la $n^{\text{ième}}$ puissance, mais *vice versa* il correspond au dernier point un groupe de n^2 points dont il est la $n^{\text{ième}}$ puissance.

Ce groupe des n^{iemes} *points-racines* est transformé en lui-même par un groupe de n^2 homographies, y compris l'identité, de telle sorte que par ces n^2 transformations d'un point quelconque du groupe on déduit tous les n^2 points qui forment le groupe.

Le groupe des points représente, pour ainsi dire, le groupe des transformations. Ces dernières s'expriment analytiquement en multipliant les coordonnées rapportées au triangle Δ par des n^{iemes} racines de l'unité. Elles sont donc les mêmes pour tous les groupes de n^2 points-racines se rapportant au triangle Δ.

Les n^2 points-racines d'un groupe sônt situés sur trois faisceaux de n droites dont chacune en contient n déterminés par une équation binome. Ces faisceaux ont pour sommets les sommets du triangle Δ et passent en eux-mêmes par les n^2 transformations du groupe.

A deux nombres quelconques n_1 et n_2 dont le produit est n correspondent deux manières de décomposer le groupe des n^2 points en groupes partiels. Nous appelons ces deux décompositions *conjuguées* pour la raison suivante. Chacun des groupes partiels se compose ou de n_1^2 ou de n_2^2 points. Les groupes de n_1^2 points passent l'un dans l'autre par le groupe de n_2^2 transformations homographiques qui correspondent aux groupes de n_2^2 points (considérés comme des $n_2^{\text{ièmes}}$ points-racines) et l'on obtient les groupes de n_2^2 points eux-mêmes en transformant un groupe quelconque de n_1^2 points par les n_2^2 homographies.

Deux points du groupe des n^2 points-racines appartiennent à un même groupe partiel ou non. Dans ce dernier cas ils définissent une homographie que nous dirons *primitive*. L'homographie est ainsi définie que par elle l'un des deux points passe dans l'autre, tandis que le triangle Δ reste invariable. Deux homographies primitives seront indépendantes si l'on ne parvient pas à l'une par une répétition de l'autre. On a alors le théorème que, si l'on choisit deux homographies du groupe qui sont primitives et indépendantes, on peut composer chaque homographie du groupe par ces deux, réitérées chacune un nombre convenable de fois.

Imaginons maintenant deux groupes de points-racines, l'un de p^2, l'autre de q^2 points. Si nous transformons l'un d'eux par toutes les homographies qui correspondent à l'autre, nous parvenons à un certain troisième groupe qui est composé des deux premiers, et ce troisième groupe consiste en $\left(\frac{pq}{r}\right)^2$ points, si r est le plus grand diviseur commun des nombres p et q. Ces remarques suffiront pour donner une idée nette des groupes de points et des groupes d'homographies en question.

3. Nous pouvons concevoir une relation géométrique entre les points du plan telle qu'à un point correspond sa $n^{\text{ième}}$ puissance homographique.

Nous représentons analytiquement cette *affinité* en élevant à la $n^{\text{ième}}$ puissance les coordonnées d'un point rapportées au triangle Δ et ainsi choisies que les coordonnées du point-unité O soient toutes égales entre elles. Aux n^2 points-racines d'un groupe correspond, dans cette affinité, le même point. A une droite quelconque sera conjuguée une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre que nous dirons la $n^{\text{ième}}$ puissance de la droite et dont l'équation dans les coordonnées mentionnées est de la forme suivante :

$$\Sigma a_i x_i^n = 0.$$

si nous désignons, comme nous le ferons toujours, par le signe Σ, la sommation par rapport aux indices 1, 2, 3. Ces *courbes-puissances* ont deux propriétés caractéristiques :

D'abord *elles sont transformées en elles-mêmes par le groupe de n^2 homographies que nous avons considéré dans l'article précédent.*

Ensuite *leur Hessienne se décompose en trois droites, les côtés du triangle Δ comptés $(n-2)$ fois.*

Les courbes elles-mêmes peuvent se décomposer en un faisceau de n droites ; alors un des coefficients a sera nul. Mais, si cela n'arrive pas, elles sont toujours privées de points singuliers et du genre riemannien $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

En égalant à zéro un des coefficients a nous voyons que, par chaque sommet du triangle Δ, il passe un faisceau de n droites dont chacune est une tangente complète de la courbe, c'est-à-dire une droite dont tous les points d'intersection avec la courbe se réunissent en un seul. Ces $3n$ tangentes singulières remplacent les $3n(n-2)$ tangentes stationnaires qu'on devrait avoir suivant les formules de Plucker et, en même temps, les tangentes doubles.

4. Notons encore les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Toutes les courbes-puissances d'ordre égal et rapportées au même triangle fondamental Δ proviennent d'une d'entre elles par les transformations homographiques qui laissent invariable le triangle Δ.*

Théorème II. — *Les polaires d'un point par rapport à une courbe-puissance sont encore des courbes-puissances.*

On obtient donc toutes les courbes-puissances d'ordre p, qui se rapportent à un certain triangle Δ, en cherchant les q^{iemes} polaires de tous les points du plan par rapport à une courbe-puissance quelconque de l'ordre $p+q$, ayant le même triangle fondamental Δ. Et réciproquement nous pouvons dire :

Chaque courbe-puissance d'ordre p peut être regardée comme la $q^{\text{ième}}$ polaire d'un point arbitraire P par rapport à une courbe-puissance d'ordre $p+q$, se rapportant au même triangle fondamental qui est ainsi complètement définie.

Car soient y_i les coordonnées du point P, si nous écrivons alors l'équation de la première courbe

$$\Sigma a_i x_i^p = 0,$$

comme il suit :

$$\sum \frac{a_i}{y_i^q} y_i^q x_i^p = 0,$$

on voit que l'équation de la seconde courbe est

$$\sum \frac{a_i}{y_i^q} x_i^{p+q} = 0.$$

5. Pour étendre la notion des puissances d'une droite à des exposants négatifs, remarquons qu'on obtient la courbe

$$\Sigma a_i x_i^{-n} = 0$$

de la courbe

$$\Sigma a_i x_i^n = 0$$

en remplaçant les coordonnées par leurs valeurs réciproques. Mais cette opération équivaut à une transformation quadratique ordinaire pour le triangle fondamental Δ, qui laisse invariable le point-unité O. Il s'ensuit, puisque les courbes-puissances à exposant positif ne passent par aucun sommet du triangle Δ, que la courbe-puissance à l'exposant $-n$ est de l'ordre $2n$ et qu'elle a un point n^{tuple} dans chaque sommet du triangle Δ. Elle doit être du même genre que la courbe à l'exposant n et, en effet, on a

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2} - 3\,\frac{n(n-1)}{2}.$$

De la même manière qu'on passe des puissances aux racines, cherchons maintenant la courbe dont la $n^{\text{ième}}$ puissance est une droite proposée. La forme de son équation est aussitôt trouvée, la voici

$$\Sigma a_i x_i^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Mais quel est son ordre et quels sont ses points singuliers?

Remarquons d'abord que *vice versa* la droite n'est pas complètement déterminée par la courbe dont elle est la $n^{\text{ième}}$ puissance. En effet, à la même *courbe-racine* correspondent n^2 droites que nous obtenons d'une d'entre elles par le groupe de n^2 homographies considéré dans l'article 2. Car on ne change pas la courbe-racine, si l'on multiplie ses coefficients par des $n^{\text{ièmes}}$ racines quelconques de l'unité.

Par conséquent, l'ordre de notre courbe doit être n puisque sa n^{ieme} puissance a l'ordre n^2.

Quant à ses points singuliers, ils correspondent aux points d'intersection des n^2 droites conjuguées à la courbe-racine. Parmi ces points d'intersection il y en a n sur chaque côté du triangle Δ, par chacun desquels passent n des n^2 droites. Ces derniers points ne nous donnent pas de points singuliers de la courbe-racine, mais les côtés du triangle Δ sont des tangentes singulières de la courbe ayant de commun avec elle n points coïncidents. Le reste de l'intersection se compose de

$$\frac{n^2(n^2-1)}{2} - 3\,\frac{n^2(n-1)}{2} = n^2\,\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

points auxquels correspondent les points doubles de la courbe-racine, et un point double est conjugué à n^2 points d'intersection, car nous trouvons pour la courbe-racine

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

points doubles, comme cela doit être, puisqu'elle est de l'ordre n et du genre 0.

6. Nous sommes maintenant en état de discuter les courbes-puissances générales, c'est-à-dire les courbes

dont l'équation a la forme

$$\Sigma a_i x_i^{\frac{m}{n}} = 0,$$

où m et n sont des nombres entiers et positifs, que nous devons supposer privés de diviseur commun.

Cette courbe est la $n^{\text{ième}}$ courbe-racine d'une courbe-puissance à exposant entier et de l'ordre m. Elle est rapportée à cette dernière courbe, point par point, sans ambiguïté ; donc elle est du même genre riemannien

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Nous trouvons ensuite que *la courbe est de l'ordre* $m.n$, puisqu'elle est la $m^{\text{ième}}$ puissance de la courbe

$$\Sigma a_i x_i^{\frac{1}{n}} = 0,$$

qui a l'ordre n.

La courbe doit avoir, de plus,

$$\frac{m^2(n-1)(n-2)}{2}$$

points doubles et m points singuliers sur chaque côté du triangle Δ, dont chacun équivaut à $n-1$ points simples et $\frac{1}{2}(n-1)(m-3)$ points doubles ordinaires. En effet, nous trouvons ainsi pour le genre de la courbe

$$\frac{(mn-1)(mn-2)}{2} - \frac{m^2(n-1)(n-2)}{2} - \frac{3m(m-1)(n-1)}{2}$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

comme il est juste.

7. Pour évaluer la classe de notre courbe, remarquons qu'une quelconque de ses tangentes a des coordonnées de la forme

$$u_i = a_i x_i^{\frac{m-n}{n}},$$

si les x_i sont les coordonnées du point de contact. On peut tirer les dernières *vice versa* des égalités précédentes, en supposant connues les u_i et l'on trouve

$$x_i = b_i u_i^{\frac{n}{m-n}}, \qquad \text{où} \qquad b_i = a_i^{\frac{n}{m-n}}.$$

En substituant ces expressions dans l'équation de notre courbe, nous obtenons son équation tangentielle

$$\Sigma b_i u_i^{\frac{m}{m-n}} = 0.$$

Cette équation est de la même forme que l'équation proposée, excepté la signification des variables qui déterminent dans l'équation précédente des droites et non pas des points. Mais les formules trouvées plus haut, pour l'ordre et les points singuliers, ne cessent pas de valoir, si l'on remplace l'ordre par la classe et les points singuliers par les tangentes singulières de la courbe donnée par son équation tangentielle.

Nous trouvons ainsi que *notre courbe est de la classe* $m(m-n)$.

En laissant au lecteur la détermination des tangentes singulières, nous nous bornons à énoncer le théorème suivant, que nous avons trouvé en même temps :

THÉORÈME III. — *La courbe réciproque d'une courbe-puissance à l'exposant* p *est une autre courbe-puissance dont l'exposant est* $\frac{p}{p-1}$. On parvient à la courbe réciproque en cherchant l'enveloppe des polaires de la courbe proposée par rapport à une conique qui est conjuguée à elle-même par rapport au triangle Δ.

8. Pour généraliser ce théorème remarquons qu'en formant les mêmes expressions qui donnent les coordonnées d'une tangente, si les valeurs x_i se rapportent

à un point de la courbe, pour un point quelconque du plan, on obtient les coordonnées de la dernière polaire de ce point par rapport à la courbe proposée. Imaginons alors que le point parcoure une courbe-puissance au même triangle fondamental que la première, nous aurons le théorème suivant :

Théorème IV. — *Étant proposées deux courbes-puissances se rapportant au même triangle fondamental, les dernières polaires des points de l'une, qui soit de l'ordre p, par rapport à l'autre, dont l'ordre soit q, enveloppent une troisième courbe-puissance au même triangle fondamental, dont la classe sera* $\frac{p}{q-1}$ *et dont l'ordre sera, par conséquent,* $\frac{p}{p-q+1}$.

Ajoutons à ce théorème le suivant :

Théorème V. — *Si nous cherchons les* $r^{\text{ièmes}}$ *polaires d'un point, auquel nous faisons parcourir une courbe-puissance de l'ordre p, par rapport à deux courbes-puissances d'ordre égal et ayant le même triangle fondamental que la première ces polaires se couperont dans un groupe de* $(s-r)^2$ *points qui engendrent une nouvelle courbe-puissance de l'ordre* $\frac{p(r-s)}{r}$, *tandis que le premier point parcourt la courbe d'ordre p.*

Deux courbes-puissances $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ d'ordre égal déterminent un faisceau de courbes

$$\varphi + \lambda\psi = 0,$$

λ désignant un paramètre variable. Les polaires d'un point par rapport aux courbes d'un faisceau forment un autre faisceau. Nous dirons les points communs des courbes de ce dernier faisceau les points conjugués au point proposé par rapport au premier faisceau. En nous servant de cette désignation nous pouvons, comme corollaire du théorème précédent, énoncer le suivant :

THÉORÈME VI. — *Les points conjugués aux points d'une droite par rapport à un faisceau de courbes-puissances (ayant le même triangle fondamental) forment une autre courbe-puissance de l'ordre* $\frac{r-s}{r}$.

Ces théorèmes peuvent servir à dériver des courbes-puissances à exposant entier les courbes-puissances à exposant fractionnaire.

9. Imaginons encore qu'il existe une relation entre les coefficients u_i dans l'équation

$$\Sigma u_i x_i^p = 0$$

d'une courbe-puissance et que cette relation soit elle-même de la forme

$$\Sigma \alpha_i u_i^q = 0,$$

alors les courbes définies par ces deux équations forment *un faisceau de l'ordre q*. Elles sont les $p^{\text{ièmes}}$ puissances des tangentes d'une courbe-puissance de la classe q.

Donc elles enveloppent elles-mêmes une courbe-puissance de l'ordre $\frac{pq}{q-1}$.

Si nous interprétons les u_i comme les coordonnées d'un point que nous nommerons *pôle* de la courbe-puissance, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Les courbes-puissances d'ordre p, dont les pôles forment une courbe-puissance d'ordre q, enveloppent une courbe-puissance d'ordre* $\frac{pq}{q-1}$.

Cette dernière courbe se rapporte avec les premières au même triangle fondamental. Deux mots encore sur les pôles que nous venons de définir. Le pôle d'une courbe-puissance est aussi le pôle des polaires du point unité par rapport à cette courbe, entre autres de la dernière polaire qui est une droite.

Si nous remplaçons le pôle d'une courbe-puissance par sa $n^{\text{ième}}$ puissance, la courbe conjuguée passera en une autre qui mérite d'être nommée la $n^{\text{ième}}$ puissance polaire de la courbe proposée et qui, si cette dernière a pour équation

$$\Sigma a_i x_i^p = 0,$$

est définie elle-même par l'équation

$$\Sigma a_i^n x_i^p = 0.$$

Pour parvenir d'une droite à ses différentes puissances polaires, transformons-la par l'homographie qui, laissant invariable le triangle fondamental, remplace le point unité par le pôle de la droite. Cette transformation s'exprime analytiquement, si

$$\Sigma a_i x_i = 0$$

est l'équation de la droite, par la substitution de $a_i x_i$ au lieu de x_j. En la répétant, nous aurons les puissances consécutives de la droite proposée.

Le même procédé ne suffit pas au cas général d'une courbe-puissance d'ordre p; au contraire, il ne fournira que les puissances polaires correspondantes à une valeur

$$n = rp + 1.$$

r désignant un nombre entier et positif quelconque. Pour avoir toutes les puissances polaires, il faut employer une transformation qui est une $p^{\text{ième}}$ racine de la transformation mentionnée, c'est-à-dire qui la donne après avoir été répétée p fois et non un nombre moindre de fois.

Au cas particulier d'une conique

$$\Sigma a_i x_i^2 = 0,$$

on peut parvenir à toutes les puissances polaires en se servant encore de la conique

$$\Sigma x_i^2 = 0,$$

qui a pour pôle le point-unité. En effet, cette conique passe par la transformation

$$x'_i = a_i x_i$$

dans la courbe

$$\Sigma a_i^2 x'^2_i = 0,$$

tandis que la première conique est transformée en celle-ci

$$\Sigma a_i^3 x'^2_i = 0.$$

Mais on peut aussi dériver des deux coniques que nous considérons comme proposées une série d'autres coniques, en cherchant de l'une d'elles la conique réciproque, c'est-à-dire l'enveloppe des polaires de ses points, par rapport à l'autre, et encore les courbes réciproques des deux coniques proposées par rapport à la conique que nous venons de construire et ainsi de suite. On voit aisément que l'on parvient de cette manière à toutes les coniques dont l'équation est de la forme suivante

$$\Sigma a_i^n x_i^2 = 0,$$

n désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Pour compléter ces remarques, ajoutons-y le théorème suivant, dont la généralisation à n dimensions est une des belles découvertes de Jacobi contenues dans son célèbre Mémoire sur les formes quadratiques.

THÉORÈME. — *Chaque transformation linéaire qui satisfait à la condition*

$$\Sigma y_i^2 = \Sigma x_i^2,$$

en désignant par y_i les transformées des x_i, et qui fait passer une conique

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0$$

dans une autre

$$\sum_i a_i y_i^2 = 0,$$

transforme en même temps les coniques qu'on obtient de la proposée en mettant dans son équation $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ à la place de x_i, et en répétant cette substitution un nombre quelconque r de fois, transforme, disons-nous, ces coniques dans les autres

$$\sum_i a_i^{2r+1} y_i^2 = 0,$$

et de même les coniques qu'on obtient de celle-ci

$$\Sigma x_i^2 = 0$$

par la même opération, dans les courbes

$$\sum_i a_i^{2r} y_i^2 = 0.$$

10. Pour finir, citons les cas les plus simples des courbes traitées ci-dessus.

1° Si nous supposons que dans l'équation

$$\Sigma a_i x_i^p = 0,$$

$p = 2$, la courbe sera une conique conjuguée à elle-même par rapport au triangle fondamental Δ;

2° Si nous posons $p = -1$, nous parvenons à une conique circonscrite au triangle Δ;

3° Si nous posons $p = \frac{1}{2}$, nous aurons une conique inscrite au triangle Δ;

4° A $p = 3$ correspond la cubique qu'on appelle *cubique équianharmonique,* parce que quatre tangentes coupant la courbe au même point sont toujours en rapport équianharmonique. Des points d'inflexion de la courbe il y en a trois sur chaque côté du triangle Δ;

5° Si nous supposons $p = \frac{1}{3}$, nous aurons une cubique rationnelle, et l'équation d'une cubique rationnelle se peut mettre toujours sous cette forme, pourvu que ses trois tangentes stationnaires soient réelles, c'est-à-dire si son point double est ou isolé ou imaginaire. Les tangentes stationnaires sont les côtés du triangle Δ;

6° En posant $p = -2$, nous obtenons une courbe rationnelle du quatrième ordre, dont les trois points doubles sont réels et les sommets du triangle Δ;

7° Aussi à $p = -\frac{1}{2}$ il correspond une courbe rationnelle du quatrième ordre qui est la transformée quadratique d'une conique touchant les côtés du triangle Δ et la réciproque d'une cubique rationnelle. Cette courbe a trois points dans les sommets du triangle Δ. A. Cayley y est parvenu de la manière suivante :

Si nous joignons aux sommets respectivement opposés les points où les côtés du triangle Δ sont touchés par une conique inscrite à ce triangle, ces trois droites se couperont en un seul point qui sera conjugué à la conique par rapport au triangle Δ. Si x_i sont les coordonnées de ce point, la conique elle-même aura l'équation

$$\sum \sqrt{\frac{\xi_i}{x_i}} = 0.$$

En supposant que cette conique passe par un point fixe aux coordonnées α_i, nous trouvons que le point conjugué à la conique est située sur la courbe

$$\sum \sqrt{\frac{\alpha_i}{x_i}} = 0,$$

qui est de la forme cherchée.

8° Le cas $p = \frac{2}{3}$ nous donne une courbe intéressante qui est la généralisation homographique de la ligne formée par les centres de courbure d'une section conique. En appelant deux droites conjuguées par rapport à une conique, si elles sont divisées harmoniquement par les tangentes de la conique passant par leur point d'intersection, nous engendrons la courbe de la manière suivante : Menons par chaque point d'une conique la droite qui est conjuguée à la tangente de la conique en ce point par rapport à une autre conique, alors ces droites envelopperont la courbe en question. Cette dernière est du sixième ordre et de la quatrième classe; elle a quatre points doubles ordinaires et encore six points situées deux à deux sur les côtés du triangle par rapport auquel les deux coniques sont conjuguées à elles-mêmes.