NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LACOUR

Représentation géométrique de l'invariant absolu et des covariants d'une forme biquadratique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 341-351
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__341_0>

[B4f]

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE L'INVARIANT ABSOLU ET DES COVARIANTS D'UNE FORME BIQUADRATIQUE;

PAR M. LACOUR,

Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

---

1. Étant donnée une équation du quatrième degré

$$U \equiv a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

nous ferons correspondre aux racines x_1, x_2, x_3, x_4 de cette équation les quatre points de la conique

$$(\Sigma_1) \qquad X = x^2, \qquad Y = 2x,$$

qui sont donnés par les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 du paramètre x : nous appellerons ces points *points fondamentaux* (1).

On obtient facilement, par un calcul d'identification, l'équation générale des coniques qui rencontrent la conique (Σ_1) aux quatre points fondamentaux. Cette équation est

$$\Sigma - \lambda \Sigma_1 = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv a_0 X^2 + 2a_1 XY + a_2 Y^2 + 2a_2 X + 2a_3 Y + a_4, \\ \Sigma_1 &\equiv Y^2 - 4ZX, \end{aligned}$$

et en désignant par λ une constante arbitraire : quand on remplace X par x^2 et Y par $2x$, Σ_1 devient nul et Σ devient identiquement égal à U.

2. *La décomposition du polynome du quatrième*

(1) *Voir* SALMON, *Algèbre supérieure*, 2e édition française, p. 286. Paris, Gauthier-Villars.

degré U *en un produit de deux facteurs du second degré se ramène à la recherche des sécantes communes à toutes les coniques du faisceau*

$$\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0.$$

En effet, soit λ_1 une valeur de λ correspondant à un système de sécantes communes, on aura une identité de la forme

$$\Sigma - \lambda\Sigma_1 = (\alpha X + \beta Y + \gamma)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma'),$$

et si, dans les deux membres de cette identité, on fait

$$X = x^2, \qquad Y = 2x,$$

il vient

$$U = (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)(\alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma').$$

Réciproquement, supposons que l'on ait l'identité

$$U = (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)(\alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma'),$$

la conique

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma')$$

est une de celles qui coupent (Σ_1) aux quatre points fondamentaux; elle peut donc être représentée par une équation de la forme $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$ et, comme elle se décompose en deux droites, elle donne un système de sécantes communes à (Σ_1) et à (Σ).

3. Les sécantes communes aux coniques du faisceau

$$\begin{aligned}\Sigma - \lambda\Sigma_1 = a_0 X^2 + 2a_1 XY + (a_2 - \lambda)Y^2 \\ + 2(a_2 + 2\lambda)X + 2a_3 Y + a_4\end{aligned}$$

se déterminent à l'aide de l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 + 2\lambda \\ a_1 & a_2 - \lambda & a_3 \\ a_2 + 2\lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette equation, qui se nomme *équation canonisante*, peut s'écrire

$$4\lambda^3 - S\lambda + T = 0,$$

en posant

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \qquad T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Dès que l'on connaît une racine de cette équation, la résolution de l'équation du quatrième degré ne dépend plus que d'équations du second degré.

4. La conique désignée ici par (Σ) est harmoniquement circonscrite à (Σ_1), puisque l'équation en λ qui détermine les sécantes communes aux coniques du faisceau

$$\Sigma - \lambda \Sigma_1 = 0$$

manque de terme en λ^2.

Le discriminant de Σ est égal à T; dans le cas particulier où $T = 0$, (Σ) se décompose en deux droites et, comme (Σ) est harmoniquement circonscrite à (Σ_1), les deux droites sont conjuguées par rapport à la conique (Σ_1).

5. On peut conclure de là que, *quand* $T = 0$, *le polynome* U *est la somme des quatrièmes puissances de deux expressions linéaires*.

En effet, $\Sigma = 0$ représente alors deux droites conjuguées par rapport aux tangentes menées de leur point d'intersection à la conique (Σ_1); Σ peut donc se mettre sous la forme

$$\Sigma \equiv P^2 + Q^2,$$

P et Q désignant les premiers membres des équations de deux tangentes à la conique (Σ). Dans l'identité précédente, faisons $X = x^2$, $Y = 2x$, Σ devient identique à U, P devient un carré parfait puisque la droite $P = 0$

rencontre la conique (Σ_1) en deux points confondus; il en est de même de Q. On est donc conduit à une identité de la forme

$$U \equiv p^4 + q^4.$$

p et q désignant des expressions linéaires par rapport à x.

La réciproque se démontre en reprenant les mêmes raisonnements dans l'ordre inverse.

6. *Dans le cas où* $T = 0$, *le rapport anharmonique* (x_1, x_2, x_3, x_4) *des quatre racines de l'équation* $U = 0$, *prises dans un ordre convenable, est égal à* -1. Cela résulte de ce que (x_1, x_2, x_3, x_4) est le rapport anharmonique du faisceau des quatre droites qui joignent l'origine aux points fondamentaux et que, dans le cas où T est égal à zéro, ces quatre points sont sur deux droites conjuguées par rapport à (Σ_1), savoir les deux sécantes communes représentées par l'équation $\Sigma = 0$.

7. Plus généralement, proposons-nous de calculer le rapport anharmonique $\rho = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ en fonction des coefficients S et T de l'équation canonisante.

ρ est le rapport anharmonique des quatre droites joignant un point quelconque de (Σ_1) aux points fondamentaux M_1, M_2, M_3, M_4; si le point considéré de (Σ_1) est M_4, les quatre droites sont

$$M_4M_1, \quad M_4M_2, \quad M_4M_3, \quad M_4M_4.$$

Ce sont les tangentes aux coniques du faisceau $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$ qui correspondent aux valeurs suivantes de λ

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \infty.$$

Ces tangentes ont des équations de la forme

$$T - \lambda T_1 = 0,$$

pour

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \infty.$$

Donc, leur rapport anharmonique

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \infty) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

La question est ramenée à former la transformée de l'équation

$$4\lambda^3 - S\lambda + T = 0,$$

la transformation étant définie par la formule

$$\rho = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

Pour cela, nous poserons

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 3A, \qquad \lambda_3 - \lambda_1 = 3B, \qquad \lambda_1 - \lambda_2 = 3C,$$

de sorte que l'on aura

$$A + B + C = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = -\frac{B}{A}.$$

Mais, en tenant compte de la condition

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

on obtient facilement

$$\lambda_1 = C - B, \qquad \lambda_2 = A - C, \qquad \lambda_3 = B - A.$$

D'après cela, S et T sont des fonctions homogènes de A, B, C respectivement du deuxième degré et du troisième degré; en remplaçant C par $-(A+B)$, S et T deviennent des fonctions homogènes de A et B de degrés 2 et 3; par conséquent $\frac{S^3}{T^2}$ ne dépend que du rapport $\frac{B}{A}$ et, comme l'inconnue ρ est égale à $-\frac{B}{A}$, $\frac{S^3}{T^2}$ s'exprime en fonction de ρ : si l'on calcule cette expression, on aura l'équation qui détermine ρ quand S et T sont donnés.

Un calcul qui ne présente aucune difficulté donne

$$\frac{1}{3.4} S = \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2 + C^2) = A^2 + AB + B^2,$$

$$\frac{1}{4} T = (B - C)(C - A)(A - B) = (2B + A)(2A + B)(B - A),$$

et l'on en conclut

$$\frac{1}{4.27} \frac{S^3}{T^2} = \frac{(1 - \rho + \rho^2)^3}{[(2\rho - 1)(\rho - 2)(\rho + 1)]^2}.$$

Telle est *la relation qui existe entre l'invariant absolu* $\frac{S^3}{T^2}$ *de la forme biquadratique* U *et le rapport anharmonique* $\rho = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *des quatre racines de l'équation* $U = 0$.

8. La condition pour que les coniques (Σ) et (Σ_1) soient tangentes, c'est-à-dire pour que l'équation aux x des points d'intersection ait une racine double, est que l'équation du troisième degré en λ

$$4\lambda^3 - S\lambda + T = 0$$

ait elle-même une racine double.

D'après cela, *le discriminant de l'équation donnée ne doit différer que par un facteur numérique de celui de l'équation en* λ, *c'est-à-dire de*

$$S^3 - 27T^2.$$

D'une manière générale, la discussion de l'équation du quatrième degré $U = 0$ et celle de l'équation du troisième degré en λ peuvent se ramener l'une à l'autre. Nous nous limiterons ici au cas où l'équation $U = 0$ a ses quatre racines distinctes en supposant dans ce qui suit que $S^3 - 27T^2$ est différent de zéro.

9. Le hessien

$$H \equiv (a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2)(a_2 x^2 + 2a_3 x + a_4) - (a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3)^2$$

est représenté sur (Σ_1) par les points où (Σ_1) est rencontrée par la conique

$$(a_0 X + a_1 Y + a_2)(a_2 X + a_3 Y + a_4) - (a_1 X + a_2 Y + a_3)^2 = 0.$$

Or, cette conique est l'enveloppe de la droite

$$x^2(a_0 X + a_1 Y + a_2) + 2x(a_1 X + a_2 Y + a_3) + (a_2 X + a_3 Y + a_4) = 0,$$

et cette droite est la polaire, par rapport à (Σ), d'un point de (Σ_1), celui dont les coordonnées sont x^2, $2x$, 1. La conique sécante est donc la polaire réciproque de (Σ_1) par rapport à (Σ).

Mais puisque (Σ) est harmoniquement circonscrite à (Σ_1), la polaire réciproque de (Σ_1) par rapport à (Σ) et la polaire réciproque de (Σ) par rapport à (Σ_1) rencontrent aux mêmes points la conique (Σ_1) (1).

D'autre part, les points où (Σ_1) est rencontrée par la polaire réciproque de (Σ) par rapport à (Σ_1) sont les points de contact des tangentes communes à (Σ_1) et à (Σ).

Donc *le hessien est représenté sur* (Σ_1) *par les points de contact des tangentes communes à* (Σ_1) *et à* (Σ).

Vérifions ce résultat par le calcul. La tangente à (Σ_1) au point dont les coordonnées sont x^2, $2x$ et 1 a pour équation

$$X - 2xY + x^2 Z = 0.$$

En écrivant que cette droite est tangente à (Σ), on

---

(1) On le voit aisément en rapportant (Σ) et (Σ_1) à leur triangle conjugué commun.

obtient, pour déterminer le paramètre x du point de contact, l'équation

$$H \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -x \\ a_2 & a_3 & a_4 & x^2 \\ 1 & -x & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le premier membre, on trouve bien le hessien comme il fallait le vérifier.

10. Proposons-nous maintenant de déterminer, sur (Σ_1), les points de contact des tangentes communes à (Σ_1) et à une conique du faisceau

$$\Sigma - \lambda \Sigma_1 = 0.$$

Il suffit pour cela d'écrire que les coordonnées de la droite

$$X - 2xY + x^2 Z = 0$$

satisfont à l'équation tangentielle

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 + 2\lambda & u \\ a_1 & a_2 - \lambda & a_3 & v \\ a_2 + 2\lambda & a_3 & a_4 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe le déterminant et si l'on ordonne par rapport à λ, on met l'équation tangentielle sous la forme

$$\sigma(u, v, w) + \lambda \Phi(u, v, w) + \lambda^2 \sigma_1(u, v, w) = 0,$$

qui met en évidence les premiers membres des équations tangentielles de trois coniques, savoir (Σ), (Σ_1) et la conique enveloppe des droites divisées harmoniquement par (Σ) et (Σ_1).

Remplaçons dans cette équation tangentielle u, v, w par les coordonnées de la tangente considérée de (Σ_1) :

$\sigma_1(u, v, w)$ devient égal à o, $\sigma(u, v, w)$ à H comme on l'a vu dans le paragraphe précédent; enfin $\Phi(u, v, w)$ devient égal à U, résultat qui s'explique en remarquant qu'une tangente à (Σ_1) en l'un des points communs à (Σ_1) et à (Σ) est divisée harmoniquement par ces deux coniques.

L'équation qui détermine les x des points de contact est donc

$$H - \lambda U = 0.$$

Donc *une des formes de l'involution définie par l'équation*

$$H - \lambda U = 0$$

est représentée sur (Σ_1) *par les points de contact des tangentes communes à* (Σ_1) *et à la conique* $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$.

De plus, on a été conduit à l'identité

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 - \lambda & a_3 & -x \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & a_4 & x^2 \\ 1 & -x & x^2 & 0 \end{vmatrix} = H - \lambda U.$$

11. En considérant en particulier les coniques évanouissantes du faisceau $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$, on obtient trois identités très importantes dans l'étude d'une forme biquadratique.

Quand la conique $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$ se réduit à un système de deux droites, les tangentes communes à cette conique et à (Σ_1) deviennent les tangentes à (Σ_1) menées par le point double du système de deux droites. Les quatre points de contact viennent se confondre deux à deux en des points situés sur la polaire du point double. L'équation aux x de ces points de contact doit admettre deux racines doubles, et l'on voit ainsi que $H - \lambda U$ *devient un carré parfait, quand on y remplace* λ *par* *une racine de l'équation*

$$4\lambda^3 - S\lambda - T = 0.$$

Il est facile de le vérifier par le calcul. Partons de l'identité

$$\begin{vmatrix} 2\alpha\alpha' & \alpha\beta'+\beta\alpha' & \alpha\gamma'+\gamma\alpha' & u \\ \alpha\beta'+\beta\alpha' & 2\beta\beta' & \beta\gamma'+\gamma\beta' & v \\ \alpha\gamma'+\gamma\alpha' & \beta\gamma'+\gamma\beta' & 2\gamma\gamma' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u & v & w \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}^2,$$

qui donne deux expressions équivalentes pour le premier membre de l'équation tangentielle de la conique $(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) = 0$. Dans cette identité, remplaçons les coefficients de l'équation ponctuelle de la conique évanouissante par leurs valeurs obtenues § 2, puis u, v, w par 1, $-x$, $2x^2$, il vient

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda_1 & 1 \\ a_1 & a_2 - \lambda_1 & a_3 & -x \\ a_2 - 2\lambda_1 & a_3 & a_4 & x^2 \\ 1 & -x & x^2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}^2,$$

ou, en désignant par φ le déterminant élevé au carré dans le second membre,

$$H - \lambda_1 U = \varphi^2.$$

L'équation $\varphi = 0$ détermine les x des points de rencontre de (Σ_1) avec la polaire du point double de $\Sigma - \lambda_1 \Sigma_1 = 0$, c'est-à-dire avec le côté du triangle conjugué commun à (Σ) et à (Σ_1) qui correspond à la racine λ_1.

En répétant les mêmes raisonnements pour les autres racines, on obtient les identités cherchées

$$H - \lambda_1 U = \varphi^2, \qquad H - \lambda_2 U = \psi^2, \qquad H - \lambda_3 U = \chi^2;$$

φ, ψ et χ sont représentés sur (Σ_1) par les couples de points situés sur les trois côtés du triangle conjugué commun à (Σ_1) et à (Σ).

Un côté de ce triangle est conjugué de chacune des sécantes communes qui passent par le sommet opposé du triangle; de plus, il est conjugué de chacun des deux autres côtés du triangle. Les principales propriétés des formes φ, ψ, χ peuvent se déduire de là.

12. Pour terminer, nous chercherons à représenter sur (Σ_1) le covariant du sixième degré

$$J = \begin{vmatrix} U'_x & U'_y \\ H'_x & H'_y \end{vmatrix}.$$

On voit aisément, en se reportant aux trois identités obtenues dans le paragraphe précédent, que chacune des racines de φ, ψ ou χ est racine de J. On a donc, en désignant par m un facteur constant,

$$J = m\varphi\psi\chi.$$

J *est représenté sur* (Σ_1) *par les trois couples de points situés sur les trois côtés du triangle conjugué commun à* (Σ_1) *et à* (Σ).