NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 285-291

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__285_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1767.

(1897, p. 243)

Étant donné un point M *de l'espace, on lui fait correspondre le point* M′ *qui lui est diamétralement opposé dans* *la sphère qui passe par ce point et par un cercle fixe* Γ *donné dans un plan* π. *Si le point* M *décrit une courbe* (M) *ou une surface* [M], *le point* M′ *décrit une courbe* (M′) *ou une surface* [M′].

Démontrer les théorèmes suivants :

1° *Si la surface* [M] *est une quadrique passant par le cercle* Γ, *la surface* [M′] *est aussi une quadrique passant par ce cercle.*

Ces deux quadriques se coupent suivant un second cercle Γ_1 *et la sphère admettant* Γ *pour section diamétrale contient aussi le cercle* Γ_1.

Si la surface [M] *se réduit à un plan, le théorème subsiste, mais la quadrique* [M′] *passe alors par le point à l'infini dans la direction normale au plan du cercle* Γ.

2° *Si la courbe* (M) *est une section circulaire de la quadrique* [M] *dans un plan parallèle au plan* π_1 *du cercle* Γ_1, *la courbe* (M′) *est une section circulaire de la quadrique* [M′] *également dans un plan parallèle à* π_1.

3° *Pour des surfaces ou des courbes quelconques, on a les propositions suivantes :*

Les parallèles aux normales en M *et en* M′ *aux surfaces* [M] *et* [M′], *respectivement menées par* M′ *et* M, *se coupent dans le plan* π.

Les plans parallèles aux plans normaux en M *et en* M′ *aux courbes* (M) *et* (M′), *respectivement menés par* M′ *et* M, *se coupent dans le plan* π.

(*Cette seconde proposition est une conséquence immédiate de la première*). (M. d'Ocagne).

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Appelons C le centre de la sphère Γ^2 admettant Γ pour section diamétrale, O le pôle de π par rapport à Γ^2, M_1 le symétrique de M′ par rapport au centre C; les points M et M_1 se correspondent dans une transformation d'Hirst ayant Γ^2 pour quadrique double, et le point O (à l'infini) pour pôle.

La transformation définie par l'énoncé est donc le *produit* d'une inversion quadrique et d'une symétrie centrale, et par suite une transformation quadratique rationnelle involutive. Il s'ensuit que, à une courbe (M) de l'ordre *n* ayant *p* points dans le plan π, non placés sur le cercle Γ, coupant le cylindre

(ΓO) en r points, et qui passe q fois par le point O, correspond en général une courbe (M′) de l'ordre $n' = n + p - q$, qui rencontre le plan π en q points non situés sur Γ et en r placés sur Γ, qui passe p fois par le point O, et coupe le cylindre (ΓO) en $n - p$ points. Les seules droites ayant pour correspondants des droites (ou mieux des coniques dégénérées) sont celles qui passent par O ou par des points du cercle Γ. A une surface [M] de l'ordre n, de la classe m, ayant pour ordre du complexe de ses tangentes c, et n'ayant pas de relations spéciales de position avec π et Γ, correspond une surface [M′] de l'ordre $2n$ et de la classe $2n + m + c$, passant n fois par le cercle Γ et aussi n fois par le point à l'infini O. Si [M] passe q fois par Γ et p fois par O se détachent de la surface [M′] q cylindres (ΓO) et p plans π : l'ordre de [M′] devient $2n - 2q - p$, [M′] passe $n - p - q$ fois par Γ et $n - 2q$ fois par le point O.

La transformée [M′] passe en outre évidemment par la courbe sphérique symétrique, par rapport au centre C de Γ^2, de la courbe où la sphère Γ^2 est coupée par [M].

En particulier, à un plan α correspond une quadrique passant par O, par Γ et par le cercle intersection de la sphère Γ^2 avec le plan α_1 symétrique de α par rapport à C. A une quadrique menée par Γ correspond une quadrique [M′] qui passe par Γ et par le cercle Γ_1, symétrique par rapport à C de l'intersection ultérieure de [M] avec Γ^2. Si la quadrique [M] passe aussi par le point O, [M′] dégénère en deux plans, l'un desquels est π (qu'on ne compte pas) et l'autre le symétrique de celui qui contient l'intersection ultérieure de [M] avec Γ^2. Comme la transformation est involutoire ce deuxième plan est celui auquel correspond la quadrique [M], etc. Aux plans de l'espace correspondent les quadriques d'une gerbe particulière, dont les paraboloïdes de révolution correspondent aux plans parallèles à π, les cônes aux plans tangents à Γ, etc.

2° A la courbe (M), intersection de la quadrique [M] avec un plan ν parallèle au plan π_1 de la section circulaire Γ_1, correspond l'intersection ultérieure des quadriques [M′] et [N′], transformées respectivement de [M] et de ν; les trois quadriques Γ^2, [M′], [N′], ayant en commun la conique Γ, ont deux à deux une autre courbe plane commune, et les plans de ces trois dernières courbes forment un faisceau : mais Γ^2 et [M] se coupent suivant les cercles Γ et Γ_1, de même Γ^2 et [N′] se coupent suivant Γ et le cercle Γ', intersection de la sphère Γ^2

avec le plan ν', symétrique de ν par rapport à C, les plans des cercles Γ_1 et Γ' sont parallèles; donc, etc ([1]).

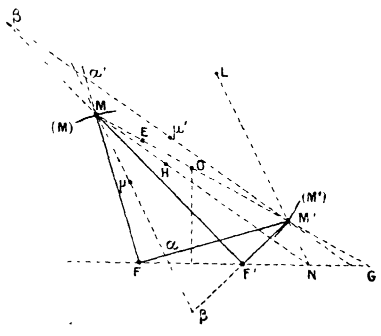
3° Les normales en M et M_1 aux surfaces [M] et [M_1], qui se correspondent dans la transformation d'Hirst, sont dans le plan $MM_1O \equiv \mu$: les normales à [M] et [M'] en les points M et M' sont donc dans ce même plan μ et coïncident avec les normales en M et M' à la courbe plane ([M], μ) et à sa transformée ; en appelant P leur intersection, les parallèles aux normales en M et M' à [M] et [M'], respectivement menées par M' et M, se coupent sur la droite ($\mu\pi$) en le point qui est symétrique de P par rapport au centre de la sphère (MΓ).

Voici, au sujet de cette question, quelques remarques qui nous ont été communiquées par M. A. MANNHEIM.

Par l'axe du cercle Γ et par le point M faisons passer un plan R. Ce plan coupe Γ aux points F, F'; il coupe S suivant la courbe (M) et S' suivant la courbe (M').

Dans le plan R (*fig.* 1), la courbe (M') est le lieu des points M' diamétralement opposés aux points M sur les cercles passant

Fig. 1.



par ces points et par F et F', ou encore, elle est telle que le segment MM' soit vu sous un angle droit de chacun des points F ou F'.

Cherchons la normale en M' à (M'). Lorsque FM tourne

([1]) En général, à toute section plane d'une quadrique menée par Γ correspond un cercle, et par suite à chaque conique menée par un point de Γ.

autour de F de l'angle infiniment petit $d\omega$, le point M se déplace sur (M) de l'arc infiniment petit d(M). On a

$$d(M) = M\alpha . d\omega,$$

la droite $M\alpha$ étant la normale en M à (M).

De même

$$d(M') = M'\alpha' . d\omega ;$$

par suite

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{M\alpha}{M'\alpha}.$$

On trouve de même, au moyen de F',

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{M\beta}{M'\beta'}.$$

On a alors

$$\frac{M\alpha}{M\beta} = \frac{M'\alpha'}{M'\beta'}.$$

Menons M'N parallèlement à $M\alpha$. Les droites M'M, M'F, M'F', M'N forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à $\frac{M\alpha}{M\beta}$. Par suite, en coupant ce faisceau par FG, ce rapport donne le rapport anharmonique des points F, F', N, G.

En prenant le rapport égal $\frac{M'\alpha'}{M'\beta'}$, on arrive alors à ces mêmes points, donc : *les parallèles aux normales en* M *et* M' *aux courbes* (M), (M'), *menées respectivement par* M' *et* M, *se coupent en un point* N *de la droite* FF'.

La sphère, menée par Γ et par M, coupe S et S' suivant des courbes correspondantes.

Menons par MM' le plan U qui les touche en M et M'. Ce plan coupe la sphère suivant un cercle C tangent à ces courbes en ces points.

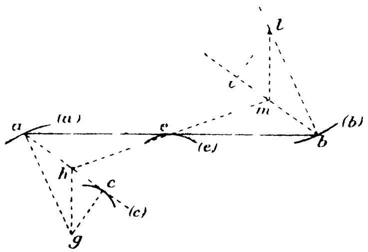
Les normales en M et M' à S et S', ainsi que les parallèles à ces droites, menées respectivement de M' et M, se projettent alors sur le plan U suivant le diamètre MM' du cercle C; autrement dit : ces dernières droites rencontrent l'axe du cercle C. Mais, d'après ce qui précède, leurs projections sur R se coupent en un point du plan de Γ; donc : *les parallèles aux normales en* M *et* M' *aux surfaces* S *et* S', *menées respectivement par* M' *et* M, *passent par la trace de l'axe du cercle* C *sur le plan de* Γ.

Cette démonstration géométrique a l'avantage de préciser la position du point de rencontre de ces parallèles.

Cherchons maintenant le centre de courbure de (M′) pour le point M′. Pour cela, je vais d'abord donner la solution du problème suivant :

Un segment ab (fig. 2), de longueur variable, est limité aux courbes (a) et (b); il se déplace en restant tangent à une courbe donnée (e). Du point b on mène une parallèle à la tangente ac menée de a à une courbe donnée (c) : construire le point où cette parallèle touche son enveloppe.

Fig. 2.



On prend le point de rencontre g de la normale en c à (c) avec la normale en a à (a) et l'on mène la perpendiculaire gh à ab. Cette droite coupe ac en h et l'on mène la droite he qui rencontre en m la parallèle bm à ac. La perpendiculaire ml à ab donne, sur la normale en b à (b), le point l que l'on projette en i sur bm : le point i est le point demandé.

Reprenons la courbe (M′) (*fig.* 1) et supposons connu le centre de courbure μ de (M) pour M. Lorsqu'on déplace M sur (M) le milieu O de MM′ reste sur la perpendiculaire élevée du milieu de FF′ à ce segment. On connaît alors la normale en ce point O à la ligne qu'il décrit, et comme on connaît les normales en M et M′ à (M) et (M′), on peut facilement construire le point E où MM′ touche son enveloppe.

Connaissant E et μ, on détermine par la construction précédente le point L où M′N touche son enveloppe.

Prenons maintenant MN, dont les extrémités décrivent des lignes dont on possède les normales en M et N; en outre, les parallèles Mμ, M′N touchent leurs enveloppes aux points μ, L. Par une construction inverse de celle qui précède, on peut construire le point H où MN touche son enveloppe.

Enfin, connaissant le point E où MM′ touche son enveloppe et le point H qui vient d'être déterminé, on peut construire le point μ' où la parallèle menée de M′ à MH touche son enveloppe : *ce point* μ' *est le centre de courbure de* (M′) *pour le point* M′.