Nouvelles annales de mathématiques

Lacour

Sur la surface de l'onde

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 266-272

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__266_1>

[M²4iγ]

SUR LA SURFACE DE L'ONDE;

PAR M. LACOUR,
Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

L'équation de la surface de l'onde rapportée à ses troisplans principaux est

$$(x^2+y^2+z^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)-(\beta^2+\gamma^2)\alpha^2x^2 \\ -(\gamma^2+\alpha^2)\beta^2y^2-(\alpha^2+\beta^2)\gamma^2z^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2=0.$$

On vérifie sans peine que cette équation peut se mettre sous l'une des trois formes

$$(x^2+y^2+z^2-\alpha^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\beta^2\gamma^2) \\ +(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)x^2=0,$$

$$(x^2+y^2+z^2-\beta^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\gamma^2\alpha^2) \\ +(\beta^2-\gamma^2)(\beta^2-\alpha^2)y^2=0,$$

$$(x^2+y^2+z^2-\gamma^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\beta^2) \\ +(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)z^2=0,$$

dont chacune met en évidence les sections par un plan principal et les points singuliers situés dans ce plan.

Ces formes d'équation permettent aussi de vérifier simplement les propriétés des plans tangents singuliers.

Les plans tangents singuliers perpendiculaires au plan $y=0$ ont pour traces sur ce plan les tangentes communes à l'ellipse et au cercle en lesquels se décompose la trace de la surface de l'onde. Ils ont pour équations

$$Q_1=kx+k'z-\beta=0,$$
$$Q_2=kx+k'z+\beta=0,$$
$$Q_3=kx-k'z-\beta=0,$$
$$Q_4=kx-k'z+\beta=0,$$

si l'on pose

$$k^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\gamma^2-\alpha^2}, \qquad k'^2=\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}.$$

L'équation de l'ensemble de ces quatre plans peut s'écrire

$$Q_1Q_2Q_3Q_4\equiv(k^2x^2-k'^2z^2-\beta^2)^2-4\beta^2k'^2z^2=0,$$

ou, en remplaçant k^2 et k'^2 par leurs valeurs

$$(\gamma^2-\alpha^2)^2Q_1Q_2Q_3Q_4\equiv[\alpha^2x^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\beta^2-\beta^2(x^2+z^2-\gamma^2)]^2 \\ -4\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)z^2.$$

Il suffit d'ajouter et de retrancher dans la parenthèse le terme $\beta^2 y^2$ pour mettre en évidence les premiers membres des équations des coniques de section par le plan $y = 0$, savoir :

$$C = x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2,$$
$$\Gamma = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2 \beta^2,$$

on trouve ainsi

$$(\gamma^2 - \alpha^2)^2 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = (\Gamma - \beta^2 C)^2 - 4\beta^2(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2) z^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\gamma^2 - \alpha^2)^2 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = (\Gamma + \beta^2 C)^2 - 4\beta^2[\Gamma C - (\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2) z^2].$$

On reconnaît dans la dernière parenthèse le premier membre de l'équation de la surface de l'onde et l'on peut alors conclure de l'identité précédente qu'on peut prendre pour équation de cette surface

$$(Q) \qquad \varphi^2 - \lambda Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = 0,$$

en désignant par λ une constante et en posant

$$\varphi = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2 \beta^2 + \beta^2(x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2).$$

L'équation (Q) montre que le plan $Q_1 = 0$ coupe la surface suivant une conique comptée deux fois; pour faire voir que cette conique est un cercle il suffit de vérifier que Q_1 est un plan de section circulaire de la quadrique $\varphi = 0$.

Or, on a identiquement

$$\varphi - 2\beta^2(x^2 + y^2 + z^2) = (\alpha^2 - \beta^2) x^2 + (\gamma^2 - \beta^2) z^2 - \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2),$$

et, comme on a posé

$$k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad k'^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2},$$

on peut écrire

$$\varphi = \beta^2[2(x^2 + y^2 + z^2) - \alpha^2 - \gamma^2] + (\gamma^2 - \alpha^2)(k'^2 z^2 - k^2 x^2);$$

au lieu de $k'^2z^2 - k^2x^2$ introduisons Q_1Q_3 en tenant compte de l'identité

$$\begin{aligned} Q_1Q_3 &\equiv (kx + k'z - \beta)(kx - k'z - \beta) \\ &\equiv k^2x^2 - k'^2z^2 + \beta^2 - 2k\beta x; \end{aligned}$$

il vient, après réduction,

$$\begin{aligned} \varphi = {} & 2\beta^2(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2) - 2x\beta\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \alpha^2)} \\ & - (\gamma^2 - \alpha^2)Q_1Q_3. \end{aligned}$$

On voit alors que la section de φ par le plan $Q_1 = 0$ est sur une sphère; de plus, cette sphère coupe le plan $x = 0$ suivant le cercle

$$y^2 + z^2 - \alpha^2 = 0.$$

Donc *la courbe de contact du plan tangent singulier* $Q_1 = 0$ *est un cercle; ce cercle et le cercle de la surface de l'onde situé dans le plan principal* $x = 0$ *sont sur une même sphère.*

II. On sait que l'on passe de l'équation ponctuelle de la surface de l'onde à l'équation tangentielle de la même surface en remplaçant

$$x,\quad y,\quad z,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,$$

par

$$u,\quad v,\quad w,\quad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma',$$

avec la condition

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha},\qquad \beta' = \frac{1}{\beta},\qquad \gamma' = \frac{1}{\gamma}.$$

On peut alors répéter sur l'équation tangentielle de la surface de l'onde les transformations précédentes ; on en conclura que les cônes tangents aux points singuliers situés dans le plan $y = 0$ sont circonscrits à la quadrique

$$\varphi' = \alpha'^2u^2 + \beta'^2v^2 + \gamma'^2w^2 - \alpha'^2\beta'^2 - \beta'^2(u^2 + v^2 + w^2 - \gamma'^2).$$

L'équation de la quadrique φ' peut se mettre sous la forme

$$\varphi' = 2\beta'^2(u^2+v^2+w^2-\alpha'^2) - 2u\beta'\sqrt{(\beta'^2-\alpha'^2)(\gamma'^2-\alpha'^2)} \\ -(\gamma'^2-\alpha'^2)Q'_1 Q'_3 = 0,$$

en désignant par Q'_1, Q'_3 les premiers membres des équations tangentielles de deux points singuliers situés dans le plan $y=0$.

On voit que le cône tangent au point $Q'_1 = 0$ est circonscrit à une quadrique qui est de révolution autour de Ox et dont l'un des foyers est à l'origine.

On conclut de là que le cône tangent au point Q'_1 admet comme focale la droite joignant son sommet à l'origine, c'est-à-dire la normale au cercle $x^2+z^2=\beta^2$; la seconde droite focale doit être symétrique de la première par rapport à l'axe du cône; c'est donc la normale à l'ellipse $\alpha^2x^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\gamma^2=0$.

Au lieu de considérer les droites focales du cône tangent on peut considérer les sections circulaires du cône réciproque et l'on retrouve un résultat qui peut, comme on sait, s'établir géométriquement, savoir :

Les plans cycliques du cône des normales en un point singulier, perpendiculaires au plan de symétrie qui passe par ce point, ont pour traces sur ce plan les tangentes à l'ellipse et au cercle, section de la surface par le même plan de symétrie.

III. *Les coordonnées d'un point de la surface de l'onde peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques de deux paramètres.*

L'équation de la surface de l'onde rapportée à ses trois plans principaux peut se mettre sous la forme

$$(x^2+y^2+z^2-\beta^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\gamma^2) \\ = (\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)y^2.$$

Introduisons deux paramètres c et c_1 en posant

$$x^2+y^2+z^2-\beta^2=(\alpha^2-\beta^2)c^2,$$
$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\gamma^2=\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)c_1^2;$$

il en résultera

$$y^2=\alpha^2c^2c_1^2.$$

En résolvant ces trois équations, on trouve les formules

$$x^2=\beta^2(1-c^2)(l^2c_1^2+l'^2),$$
$$z^2=\alpha^2(1-c_1^2)(k^2c^2+k'^2),$$
$$y^2=\alpha^2c^2c_1^2,$$

où l'on a posé

$$k^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\gamma^2-\alpha^2}, \qquad k'^2=\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2},$$
$$l^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}\,\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}, \qquad l'^2=\frac{\gamma^2}{\beta^2}\,\frac{\beta^2-\alpha^2}{\gamma^2-\alpha^2},$$

de sorte que l'on a

$$k^2+k'^2=1, \qquad l^2+l'^2=1.$$

Pour obtenir maintenant x, y, z en fonctions uniformes de deux paramètres, il suffit de se rappeler qu'entre les trois fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, correspondant au module k, on a les relations

$$\operatorname{sn}^2 u=1-\operatorname{cn}^2 u, \qquad \operatorname{dn}^2 u=k^2\operatorname{cn}^2 u+k'^2.$$

Nous poserons alors, en mettant en évidence les modules des fonctions elliptiques,

$$c=\operatorname{cn}(u,k), \qquad c_1=\operatorname{cn}(v,l),$$

et nous obtiendrons pour x, y, z les formules [1]

$$x=\beta\operatorname{sn}(u,k)\operatorname{dn}(v,l),$$
$$y=\alpha\operatorname{cn}(u,k)\operatorname{cn}(v,l),$$
$$z=\alpha\operatorname{dn}(u,k)\operatorname{sn}(v,l),$$

---

[1] Ces formules sont données sans démonstration à la fin d'un

ou, sous une forme plus abrégée,

$$x = \beta s d_1,$$
$$y = \alpha c c_1,$$
$$z = \alpha d s_1.$$

Remarque. — On passe de k^2 à l'^2 et de k'^2 à l^2 en remplaçant α, β, γ par $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, c'est-à-dire en remplaçant l'ellipsoïde (E) ayant pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$

par l'ellipsoide (E')

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 1 = 0$$

polaire réciproque de (E) par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$