

GEMINIANO PIRONDINI

**Projection orthogonale sur une  
surface de révolution**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 17  
(1898), p. 246-266

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1898\\_3\\_17\\_\\_246\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__246_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[06az]

**PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE SURFACE  
DE RÉVOLUTION;**

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI,

Professeur à l'Institut technique, à Parme.

— — —

I.

Soient  $\Sigma$  une surface de révolution dont l'axe est sur l'axe des  $z$ ,  $L$  une ligne quelconque et  $A$  la projection orthogonale de  $L$  sur la surface  $\Sigma$ . Si

$$A[x(t), y(t), z(t)], \quad A_1[\xi(u), \tau(u), \zeta(u)]$$

sont deux points correspondants des lignes  $L, A$ , les

équations

$$(1) \quad (x - \xi) \frac{d\xi}{du} + (y - \eta) \frac{d\eta}{du} + (z - \zeta) \frac{d\zeta}{du} = 0. \quad x\eta - y\xi = 0$$

expriment évidemment que la droite  $AA_1$  est normale à  $\Sigma$ . En posant

$$(2) \quad \xi = \rho \cos u, \quad \eta = \rho \sin u, \quad \zeta = U,$$

les conditions (1) deviennent

$$(3) \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rho' = \rho \rho' + U U' - \zeta U'; \quad \text{tang } u = \frac{y}{x}.$$

Si la ligne méridienne de  $\Sigma$  est représentée par l'équation

$$(4) \quad \zeta_0 = \Phi(\xi_0).$$

la première équation (3) est à remplacer par l'autre :

$$(5) \quad \zeta \Phi'(\rho) + \sqrt{x^2 + y^2} = \rho + \Phi(\rho) \Phi'(\rho).$$

Quand la surface  $\Sigma$  et la ligne  $L$  sont données d'avance, on peut éliminer un des paramètres  $t, u$  entre la deuxième équation (3) et l'équation (5). On obtient ainsi  $\rho$  en fonction de  $u$  ou de  $t$  respectivement, ce qui [en vertu des équations (2)] équivaut à la détermination de  $\Lambda$ .

Quand la ligne  $L$  est placée sur le plan  $z = 0$  et que

$$(6) \quad R = f(u)$$

est son équation polaire, la détermination de  $\Lambda$  est ramenée à la résolution de l'équation

$$(7) \quad f(u) = \rho + \Phi(\rho) \Phi'(\rho)$$

par rapport à  $\rho$ .

*Exemples.* — 1° Si  $\Sigma$  est un cône de révolution dont  $\theta$  est le demi-angle au sommet, pour la détermination

tion de  $\Lambda$  il suffit de faire

$$\rho = (x \cos \theta + \sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta) \sin u \quad \sin u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dans les équations (2).

En supposant

$$z = \alpha \sqrt{x^2 + y^2} - \beta, \quad R = f(u) = m e^{mu},$$

on trouve

$$\rho = m (\alpha \cos \theta + \sin \theta) \sin \theta e^{mu} + \beta \sin \theta \cos \theta$$

On a donc ce théorème :

*Si une hélice cylindro-conique, placée sur le cône de révolution  $\Sigma'$ , est projetée sur un autre cône  $\Sigma$  ayant le même axe que  $\Sigma'$ , on obtient une ligne  $\Lambda$  dont la projection équatoriale est une conchoïde <sup>(1)</sup> d'une spirale logarithmique par rapport au pôle de cette courbe.*

Quand les cônes  $\Sigma, \Sigma'$  ont le même sommet ( $\beta = 0$ ), la ligne  $\Lambda$  est elle-même une hélice cylindro-conique.

° Si la méridienne de  $\Sigma$  est la courbe de troisième ordre

$$z_0 = \sqrt{m \xi_0^3 - n \xi_0^2 + p \xi_0 + q}$$

et si  $L$  est la ligne plane (b), on a

$$3m \rho^2 + 2(n-1)\rho - p - 2f(u) = 0,$$

d'où il suit

$$\rho = -\frac{n-1}{3m} \pm \frac{1}{3m} \sqrt{(n+1)^2 - 3mp + 6mf(u)}$$

et la détermination de  $\Lambda$  n'offre aucune difficulté.

<sup>(1)</sup> On appelle *conchoïde* d'une courbe  $C$  par rapport au point  $A$  la courbe  $C'$  qu'on obtient en augmentant d'une quantité constante les rayons vecteurs de la ligne  $C$  issus du point  $A$ .

En supposant successivement  $m = 0$ ;  $m = 0, n = 0$ ;  $m = 0, p = 0$ , on arrive à des théorèmes qui sont contenus dans ceux du § III.

## II.

Si la ligne méridienne de la surface  $S$  engendrée par la rotation de  $L$  autour de l'axe des  $z$  est représentée par l'équation

$$z_0 = F(x_0).$$

on a

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R, \quad z = F(R),$$

et la condition (5) donne

$$(8) \quad \rho - R + [\Phi(\rho) - F(R)] \Phi'(\rho) = 0.$$

Si, au contraire, les lignes méridiennes des surfaces  $\Sigma, S$  sont représentées par les équations

$$\xi_0 = \Psi(\zeta_0), \quad x_0 = P(z_0),$$

la première condition (3) donne

$$(9) \quad \zeta - z + [\Psi(\zeta) - P(z)] \Psi'(\zeta) = 0.$$

Il s'ensuit que *les rayons vecteurs  $R, \rho$  sont liés par une relation finie et les hauteurs correspondantes  $z, \zeta$  sont liées par une autre relation finie. Ces relations dépendent seulement de la nature des surfaces  $\Sigma, S$ .*

Si, par exemple,  $\Sigma$  est un cône ayant son sommet à l'origine [ $\Psi(\xi_0) = \alpha \xi_0$ ] et si  $S$  est un parabolôïde

$$\left[ F(x_0) = \frac{x_0^2}{a} \right],$$

les relations dont on vient de parler sont

$$R + \frac{\alpha}{a} R^2 = (1 + \alpha^2) \rho; \quad z + \frac{1}{\alpha} \sqrt{az} = \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) \zeta.$$

Quand on donne d'avance la relation

$$(10) \quad R = \Lambda(\rho)$$

entre les rayons vecteurs  $R$ ,  $\rho$ , ou bien la relation

$$(11) \quad z = L(\zeta)$$

entre les hauteurs  $z$ ,  $\zeta$ , les équations (8), (9) peuvent s'écrire

$$(12) \quad F[\Lambda(\rho)] = \Phi(\rho) + \frac{\rho - \Lambda(\rho)}{\Phi'(\rho)},$$

$$(13) \quad P[L(\zeta)] = \Psi(\zeta) + \frac{\zeta - L(\zeta)}{\Psi'(\zeta)},$$

et l'on peut déterminer  $\Sigma$  ou  $S$  quand on donne respectivement  $S$  ou  $\Sigma$ .

Dans le premier cas, la détermination de la méridienne de  $\Sigma$  est ramenée à l'intégration d'une des équations différentielles (12), (13).

Dans le deuxième cas, après avoir remplacé  $\rho$  dans le deuxième membre de l'équation (12), ou  $\zeta$  dans le deuxième membre de l'équation (13) par les valeurs qu'on déduit des équations (10), (11), on obtient

$$F = \mu(R), \quad P = \nu(z).$$

$\mu, \nu$  désignant deux fonctions connues. D'après cela, la méridienne de  $S$  est la courbe représentée par une des équations

$$z_0 = \mu(x_0), \quad x_0 = \nu(z_0).$$

*Exemples.* — 1° Si  $S$  est un cône [ $F(x_0) = \alpha x_0 + \beta$ ] et  $R, \rho$  sont liés par la relation

$$R = \Lambda(\rho) = \rho + \alpha,$$

la méridienne de  $\Sigma$  est la courbe

$$\log \left( \alpha \xi_0 - z_0 + \alpha x + \beta - \frac{\alpha}{\alpha} \right) - \frac{\alpha}{\alpha} (\alpha \xi_0 - z_0 + \alpha x + \beta) + \frac{\alpha^2}{\alpha} \xi_0 = c,$$

$c$  étant une constante arbitraire.

2° Si la méridienne de  $\Sigma$  est la parabole  $\xi_0 = \frac{z_0^2}{m}$  et

( 251 )

$z, \zeta$  sont liés par la relation

$$z = L(\zeta) = \sqrt{\alpha \zeta \bar{\zeta}},$$

la méridienne de  $S$  est la ligne du cinquième ordre

$$x_0 = \frac{z_0^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2 m} + \frac{m(z_0 - \alpha)}{2z_0}.$$

L'équation (7) démontre que : *Lorsque la ligne  $L$  est tracée sur le plan coordonné  $z = 0$ , les rayons vecteurs  $R, \rho$  sont liés par la relation*

$$R = \rho + \Phi(\rho) \Phi'(\rho).$$

Il s'ensuit que, si l'on connaît d'avance la relation (10) entre  $R, \rho$ , on a

$$\Phi^2(\rho) - 2 \int \Lambda(\rho) d\rho - \rho^2 + c,$$

$c$  étant une constante arbitraire.

Dans ce cas, la ligne méridienne de  $\Sigma$  est représentée par l'équation

$$\zeta_0 = \sqrt{2 \int \Lambda(\xi_0) d\xi_0 - \xi_0^2 + c}$$

Si, par exemple,  $R = \Lambda(\rho) = a\rho^m$ , la méridienne de  $\Sigma$  est la ligne

$$\zeta_0^2 = \frac{2a}{m+1} \xi_0^{m+1} - \xi_0^2 + c.$$

Pour  $m = 1$ ,  $L$  est une ligne homothétique à la projection équatoriale de  $\Lambda$ , et  $\Sigma$  est une surface du deuxième ordre à centre (voir le § IV).

### III.

Quand les rayons vecteurs  $R, \rho$  sont liés par la relation (10) et les hauteurs  $z, \zeta$  par la relation (11), la première condition (3) donne

$$(14) \quad U' + \rho \rho' - U' L(U) - \rho' \Lambda(\rho) = 0.$$

Il s'ensuit que : *La méridienne de la surface  $\Sigma$  est la courbe représentée par l'équation*

$$(15) \quad \zeta_0^2 + \xi_0^2 - 2 \int L(\zeta_0) d\zeta_0 - 2 \int \Lambda(\xi_0) d\xi_0 = c,$$

*c étant une constante arbitraire.*

Si l'on donne la surface  $\Sigma$  et la relation (11), l'équation (14) démontre que les rayons vecteurs  $R, \rho$  sont liés par la relation

$$\Lambda(\rho) = R = \rho + \Phi(\rho) \Phi'(\rho) - \Phi'(\rho) L[\Phi(\rho)].$$

Si, au contraire, on donne  $\Sigma$  et la relation (10), l'équation (14) peut s'écrire

$$(16) \quad L[\Phi(\rho)] = \Phi(\rho) + \frac{\rho - \Lambda(\rho)}{\Phi'(\rho)}.$$

Et puisque, en résolvant l'équation

$$\Phi = \Phi(\rho),$$

par rapport à  $\rho$ , le deuxième membre de l'équation (16) se réduit à une fonction connue  $\theta(\Phi)$  de  $\Phi$ , on voit que les hauteurs  $z, \zeta$  sont liées par la relation

$$z = \theta(\zeta).$$

Supposons que les rayons vecteurs  $R, \rho$  soient liés par la relation

$$(17) \quad R = m\rho + n,$$

et les hauteurs  $z, \zeta$  par l'autre relation

$$(18) \quad z = k\zeta + h.$$

L'équation (15) démontre que la ligne méridienne de  $\Sigma$  est la conique

$$(19) \quad (1-k)\zeta_0^2 + (1-m)\xi_0^2 - 2h\zeta_0 - 2n\xi_0 = c.$$

Si l'on suppose, au contraire, que la ligne méridienne



de  $\Sigma$  soit la conique

$$(20) \quad A\xi_0^2 + B\zeta_0^2 + 2C\xi_0 + 2D\zeta_0 + E = 0,$$

et qu'il subsiste la relation (17), ou bien l'autre (18), les considérations qu'on vient d'exposer conduisent au théorème suivant :

*Si, dans la projection orthogonale d'une ligne L sur une surface de révolution  $\Sigma$ , on énonce les trois conditions : 1° Les hauteurs  $z, \zeta$  sont liées par une relation linéaire (18); 2° les rayons vecteurs  $R, \rho$  des projections équatoriales des lignes L,  $\Lambda$  sont liés par une relation linéaire (17); 3° la ligne méridienne de  $\Sigma$  est la conique représentée par l'équation (20), les coefficients A, B, C, D vérifiant les conditions*

$$(21) \quad \Lambda h + C(1-k) = 0, \quad Bn + D(1-m) = 0,$$

*deux de ces conditions entraînent nécessairement la troisième. La ligne L, dans la rotation autour de l'axe des  $z$ , engendre une surface dont la courbe méridienne est la conique*

$$\frac{\Lambda}{k^2}(z_0 - h)^2 - \frac{B}{m^2}(x_0 - n)^2 + \frac{2C}{k}(z_0 - h) + \frac{2D}{m}(x_0 - n) + E = 0.$$

*Cas particuliers.* — Dans l'équation (20) supposons successivement

$$\begin{array}{llll} h = 0, & n = 0: & h = 0, & m = 1: \\ k = 1, & n = 0: & k = 1, & m = 1, \end{array}$$

et comparons ensuite les équations qu'on va obtenir à l'équation (20). On a respectivement :

$$\begin{array}{llll} C = 0, & D = 0: & B = 0, & C = 0: \\ A = 0, & D = 0: & A = 0, & B = 0. \end{array}$$

ce qui démontre que les conditions (21) sont vérifiées par identité.

On a donc les théorèmes :

*Si, dans la projection orthogonale d'une ligne L sur une surface de révolution  $\Sigma$ , on énonce les conditions :*

*A. 1° Les hauteurs  $z, \zeta$  sont proportionnelles; 2° les projections équatoriales des lignes L,  $\Lambda$  sont deux courbes homothétiques par rapport à l'origine; 3° la surface  $\Sigma$  est du deuxième ordre à centre;*

*B. 1° Les hauteurs  $z, \zeta$  sont proportionnelles; 2° une des projections équatoriales des lignes L,  $\Lambda$  est une conchoïde de l'autre par rapport à l'origine; 3° la surface  $\Sigma$  a pour méridienne une parabole ayant son axe sur l'axe des  $x$ ;*

*C. 1° Les hauteurs  $z, \zeta$  ont une différence constante; 2° les projections équatoriales des lignes L,  $\Lambda$  sont deux lignes homothétiques par rapport à l'origine; 3° la surface  $\Sigma$  est un parabolôïde;*

*D. 1° Les hauteurs  $z, \zeta$  ont une différence constante; 2° une des projections équatoriales des lignes L,  $\Lambda$  est une conchoïde de l'autre par rapport à l'origine; 3° la surface  $\Sigma$  est un cône;*

*Deux conditions de A, B, C, D entraînent nécessairement la troisième. La ligne L, tournant autour de l'axe des  $z$ , engendre une surface S de la même nature que  $\Sigma$ .*

En appliquant les théorèmes précédents (A, C), on en déduit la proposition suivante :

*Quand les lignes L,  $\Lambda$  sont placées sur deux plans parallèles entre eux et parallèles à l'axe des  $z$  :*

*1° Si les hauteurs  $z, \zeta$  sont proportionnelles,  $\Sigma$  et S sont deux surfaces du deuxième ordre à centre (L et  $\Lambda$  sont deux ellipses ou deux hyperboles); et vice versa;*

*2° Si les hauteurs  $z, \zeta$  ont une différence constante,*

les surfaces  $\Sigma$ ,  $S$  sont deux paraboloides ( $L$  et  $\Lambda$  sont deux paraboles); et vice versa.

## IV.

Si, dans la première équation (3), on suppose successivement :  $z = k\zeta = kU$ ,  $z = 0$ , on obtient après l'intégration

$$\zeta_p = \frac{1}{\sqrt{1-k}} \sqrt{\int R \rho' du - \rho^2 + m},$$

$$\zeta = \sqrt{\int R \rho' du - \rho^2 - n},$$

$m$ ,  $n$  étant des constantes arbitraires. En supposant  $m = n$ , on a cet énoncé :

Lorsque les hauteurs  $z$ ,  $\zeta$  sont proportionnelles ( $z = k\zeta$ ), si une ligne  $L_p$  et sa projection équatoriale  $L_0$  sont projetées sur les surfaces  $\Sigma_p$ ,  $\Sigma$  suivant les lignes  $\Lambda_p$ ,  $\Lambda$  ayant la même projection équatoriale  $\Lambda_0$ , on a entre les hauteurs  $\zeta_p$ ,  $\zeta$  la relation

$$\zeta_p = \frac{1}{\sqrt{1-k}} \zeta.$$

En vertu de ce théorème, à chaque propriété relative au cas où  $z$ ,  $\zeta$  sont proportionnelles, correspond une autre propriété relative au cas où  $L$  est sur le plan  $z = 0$ ; et vice versa.

Par exemple, les propriétés A et B du § III conduisent au théorème que voici :

Quand la ligne primitive  $L$  est sur le plan  $z = 0$  :

1° Si cette ligne est homothétique à la projection équatoriale de  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  est une surface de deuxième ordre à centre; et vice versa (voir le dernier théorème du § II);

2° Si cette ligne est une conchoïde de la projection

équatoriale de  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  a pour méridienne une parabole ayant l'axe sur l'axe des  $x$ ; et vice versa.

Le premier de ces théorèmes conduit à la propriété suivante : Quand la ligne primitive  $L$  est une droite du plan  $z = 0$  et que  $\Lambda$  est sur un plan parallèle à l'axe des  $z$  et à la droite  $L$ ,  $\Sigma$  est une surface du deuxième ordre à centre ( $\Lambda$  est une ellipse ou une hyperbole); et vice versa.

En considérant les lignes  $\Lambda$ ,  $L$  définies par les équations

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos u, & \eta &= \rho \sin u, & \zeta &= U: \\ x &= R \cos u, & y &= R \sin u, & z &= z(u), \end{aligned}$$

et les lignes  $\Lambda_1$ ,  $L_1$  définies par les autres équations

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \rho_1 \cos u = (\rho + k) \cos u, & \eta_1 &= \rho_1 \sin u = (\rho + k) \sin u, \\ & & \zeta_1 &= U, \\ x_1 &= R_1 \cos u = (R + k) \cos u, & y_1 &= R_1 \sin u = (R + k) \sin u, \\ & & z_1 &= z(u), \end{aligned}$$

on trouve que les conditions

$$R\rho' = \rho\rho' + UU' - zU', \quad R_1\rho'_1 = \rho_1\rho'_1 + UU' - zU'$$

reviennent l'une à l'autre. On a donc ce théorème :

*Si l'on augmente les rayons vecteurs des projections équatoriales des deux lignes  $\Lambda$ ,  $L$  d'une même quantité constante  $k$ , sans altérer les hauteurs  $\zeta$ ,  $z$ , on obtient deux nouvelles lignes  $\Lambda_1$ ,  $L_1$  telles que, si  $\Lambda$  est la projection orthogonale de  $L$  sur la surface  $\Sigma$  engendrée par la rotation de  $\Lambda$  autour de l'axe des  $z$ ,  $\Lambda_1$  est la projection orthogonale de  $L_1$  sur la surface  $\Sigma_1$  engendrée par la rotation de  $\Lambda_1$ .*

Ce théorème conduit souvent à des résultats impor-

tants. Si, par exemple, on a recours au dernier théorème du § III et au dernier théorème du § IV, on a cette proposition :

*Quand les projections équatoriales des lignes  $\Lambda$ ,  $L$  sont deux conchoïdes de Nicomède ayant leurs pôles à l'origine et leurs bases rectilignes parallèles entre elles :*

1° *Si les hauteurs  $z$ ,  $\zeta$  sont proportionnelles, les surfaces  $\Sigma$ ,  $S$  ont pour méridiennes deux coniques à centres; et vice versa;*

2° *Si les hauteurs  $z$ ,  $\zeta$  ont une différence constante, les surfaces  $\Sigma$ ,  $S$  ont pour méridiennes deux paraboles dont les axes sont parallèles à l'axe des  $z$ ; et vice versa.*

*Quand la ligne primitive  $L$  (placée sur le plan  $z = 0$ ) et la projection équatoriale de  $\Lambda$  sont deux conchoïdes de Nicomède ayant leurs pôles à l'origine et leurs bases rectilignes parallèles entre elles, la surface  $\Sigma$  a pour méridienne une conique à centre; et vice versa.*

## V.

Admettons que les projections équatoriales  $L_0$ ,  $\Lambda_0$  des lignes  $L$ ,  $\Lambda$  soient deux courbes semblables (ou égales), placées de façon que deux points homologues dans la similitude soient aussi correspondants dans la projection. On doit avoir

$$(22) \quad x = a + k(\xi \cos \varepsilon - \tau_1 \sin \varepsilon), \quad y = b + k(\xi \sin \varepsilon + \tau_1 \cos \varepsilon).$$

$a$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  étant des constantes; et les conditions fondamentales (1) donnent les équations

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \zeta - \frac{(k \cos \varepsilon - 1)(\xi \xi' + \tau_1 \tau_1') - k \sin \varepsilon (\xi' \tau_1 - \xi \tau_1') + a \xi' + b \tau_1}{\zeta'} \\ k \sin \varepsilon (\xi^2 + \tau_1^2) - a \tau_1 + b \xi = 0, \end{array} \right.$$

d'où, par l'application des égalités (22), on dérive

$$(24) \quad \begin{cases} k^2(z\xi' - z'\xi) = (1 - k \cos \varepsilon)(xx' - yy') \\ \quad \quad \quad + k \sin \varepsilon(x'y - xy') - ax' - by', \\ \sin \varepsilon(x^2 + y^2) - (a \sin \varepsilon - b \cos \varepsilon)x \\ \quad \quad \quad - (a \cos \varepsilon + b \sin \varepsilon)y = 0. \end{cases}$$

Il suit que les lignes  $\Lambda$ ,  $L$  sont sur deux cylindres circulaires  $\Gamma$ ,  $G$  contenant l'axe des  $z$ .

Si l'on trace  $\Lambda$  sur le cylindre  $\Gamma$  d'une manière arbitraire,  $L$  est définie par les équations (22) et par la première équation (23). Si l'on part, au contraire, de la ligne  $L$ , la détermination de  $\Lambda$  exige l'intégration de la première équation (24).

Quand  $L$  est sur le plan  $z = 0$ , cette courbe est le cercle représenté par la deuxième équation (24) et la ligne  $\Lambda$  est définie par les égalités

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4k \sin \varepsilon (b\xi - k \sin \varepsilon \xi^2)}}{2k \sin \varepsilon}, \\ z^2 - 2a\xi + 2br_1 \\ &+ (k \cos \varepsilon - 1)(\xi^2 - r_1^2) - 2k \sin \varepsilon \int \left( r_1 - \xi \frac{dr}{d\xi} \right) d\xi + m. \end{aligned}$$

$m$  étant une constante arbitraire.

Supposons que la ligne primitive  $L$  et sa projection orthogonale  $\Lambda$  soient deux courbes semblables (ou égales), placées de façon que deux points homologues dans la similitude soient aussi correspondants dans la projection.

En supposant que  $L$ ,  $\Lambda$  puissent être réduites à deux courbes homothétiques par rapport à l'origine, après une rotation  $\varepsilon$  autour de l'axe des  $z$  et une translation arbitraire, on a les équations (22) et cette autre :

$$(25) \quad z = c + k\xi,$$

$c$  étant une constante. En éliminant  $z$  entre les équations

tions (23), (25) et  $\zeta$  entre les équations (24), (25), on obtient après l'intégration

$$\begin{aligned} r &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4k \sin \varepsilon (b \zeta + k \sin \varepsilon \zeta^2)}}{2k \sin \varepsilon}, \\ 1 - k) \zeta^2 - 2c \zeta \\ &= 2a \zeta + 2b \tau + (k \cos \varepsilon - 1)(\zeta^2 + \tau^2) - 2k \sin \varepsilon \int \left( \tau - \zeta \frac{d\tau}{d\zeta} \right) d\zeta + m, \\ y &= \left\{ \begin{array}{l} a \cos \varepsilon + b \sin \varepsilon \\ + \sqrt{(a \cos \varepsilon + b \sin \varepsilon)^2 - 4 \sin \varepsilon [(b \cos \varepsilon - a \sin \varepsilon)x + \sin \varepsilon x^2]} \end{array} \right\} / \sin \varepsilon \\ 1 - k) z^2 - 2c z \\ &- 2ax + 2by + (k \cos \varepsilon - 1)(r^2 + j^2) - 2k \sin \varepsilon \int \left( y - x \frac{dy}{dx} \right) dx + n, \end{aligned}$$

$m$ ,  $n$  étant des constantes arbitraires.

Les lignes  $\Lambda$ ,  $L$  sont donc, à une constante près, définies entièrement; les projections équatoriales de ces lignes sont deux cercles passant à l'origine des axes.

*Remarque.* — L'hypothèse  $k = 1$  correspond à l'égalité des lignes  $L_0$ ,  $\Lambda_0$  ou de  $L$ ,  $\Lambda$ .

## VI.

Que les projections équatoriales  $L_0$ ,  $\Lambda_0$  des lignes  $L$ ,  $\Lambda$  soient deux courbes semblables (ou égales), placées d'une façon quelconque, on peut passer de  $\Lambda_0$  à  $L_0$  après les opérations suivantes: la réduction des coordonnées dans un rapport constant ( $k$ ); une rotation ( $\varepsilon$ ) de la ligne dérivée autour d'un point arbitraire de son plan (l'origine); une translation convenable ( $a$ ) de la courbe nouvelle  $L_1$  suivant une certaine direction (l'axe des  $x$ ).

Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont les points où  $\Lambda_0$ ,  $L_1$ ,  $L_0$  sont coupées par un rayon vecteur quelconque, incliné de l'angle  $u$  sur l'axe des  $x$  et  $D$  est le point où  $L_0$  est coupée par

une droite parallèle à l'axe des  $x$  menée par  $B$ , on a

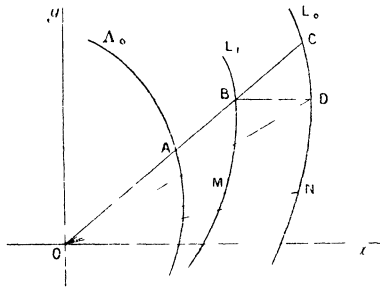
$$\begin{aligned} BD &= a, & O\Lambda &= z = z(u), \\ OB - \rho_1 &= k\varphi(u + \varepsilon), & \cot \widehat{DO\Lambda} &= \cot u + \frac{a}{\rho_1 \sin u}, \\ OD &= \sqrt{\rho_1^2 + a^2} \cos u - a^2 \end{aligned}$$

Si donc  $u = \theta(\omega)$  est une solution de l'équation

$$(26) \quad \cot u + \frac{a}{k\varphi(u + \varepsilon) \sin u} = \cot \omega,$$

on a

$$OD = \sqrt{k^2 \varphi^2[\theta(\omega) + \varepsilon] + a^2} \cos[\theta(\omega) - \varepsilon] - a^2,$$



En posant  $OC = R$  et en remarquant que  $u$  est l'angle polaire du point  $C$ , on a

$$(27) \quad R = \sqrt{k^2 \varphi^2[\theta(u) + \varepsilon] + a^2} \cos[\theta(u) + \varepsilon] - a^2$$

et la détermination des lignes  $L$ ,  $\Lambda$  et de la surface  $\Sigma$  n'offre aucune difficulté.

Quand  $L$  est sur le plan  $z = 0$ , (27) est son équation polaire et la ligne  $\Lambda$  est représentée par les équations

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(u) \cos u, \\ \eta &= \varphi(u) \sin u, \\ \zeta &= \sqrt{2 \int R \varphi'(u) du - \varphi^2(u)} + c \end{aligned}$$

$c$  étant une constante arbitraire.



Supposons que la ligne primitive  $L$  et sa projection orthogonale  $\Lambda$  soient deux courbes semblables (ou égales) placées d'une façon quelconque.

Ces lignes peuvent être réduites à deux courbes homothétiques par rapport à l'origine, après une rotation  $\varepsilon$  autour de l'axe des  $z$  (c'est un cas particulier) et une translation suivant une direction donnée, qu'on peut supposer parallèle au plan  $\gamma = 0$ , sans nuire à la généralité.

Si, de plus, cette translation est décomposable, suivant  $Ox$ ,  $Oz$ , en les translations  $a$ ,  $b$ , on peut appliquer les formules de ce paragraphe. Dans la figure précédente  $A$ ,  $M$  sont deux points des courbes  $\Lambda_0$ ,  $L_0$  choisis de façon que

$$OA = \rho. \quad OM = k\rho.$$

Si du point  $M$  on mène une droite parallèle à l'axe des  $x$ , coupant  $L_0$  au point  $N$ , on a

$$\cot \widehat{NOX} = \cot \omega = \cot(u + \varepsilon) + \frac{a}{k\rho \cdot \sin(u + \varepsilon)}$$

et, conséquemment,

$$(28) \quad \alpha = \arccot \left\{ \cot(u + \varepsilon) + \frac{a}{k\rho \cdot \sin(u + \varepsilon)} \right\}.$$

La hauteur de  $L$  en  $N$  s'obtient par la première équation (3), en remplaçant  $z$  et  $u$  par  $z - b$  et  $\omega$ ; la hauteur de  $\Lambda$  en  $A$  est  $U(u)$ . La condition exprimant que ces hauteurs ont le rapport constant  $k$  est donc

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi(\omega) - \sqrt{k^2 \varphi^2[\theta(\omega) + \varepsilon] + 2ak \cdot \varphi[\theta(\omega) + \varepsilon] \cdot \cos[\theta(\omega)] + a}}{U'(\omega)} \\ \times \varphi'(u) - U(\omega) + b = k \cdot U(u), \end{array} \right.$$

$\omega$  étant donnée par l'équation (28).

En résumé, on a  $\rho = \varphi(u)$ ;  $R$  est donné par l'équa-

tion (27) et la forme de la fonction  $U(u)$  doit être déterminée après l'équation (29).

## VII.

Le lieu des projections d'un point fixe P ou d'une ligne fixe L sur une surface de révolution  $\Sigma$ , variable ou invariable, mobile dans l'espace suivant une loi quelconque est respectivement une ligne  $L_t$  ou une surface  $S_t$  jouissant de nombreuses propriétés. Nous nous bornerons ici à considérer le cas où  $\Sigma$ , invariable de forme, se déplace de façon à conserver son axe parallèle à une direction donnée.

Les coordonnées  $\xi, \tau, \zeta$  d'un point A d'une ligne  $\Lambda$  placée sur la surface  $\Sigma$  à l'instant initial sont données par les équations (2); les coordonnées  $x_1, y_1, z_1$  du même point A à un autre instant quelconque sont

$$x_1 = \xi + \lambda(\nu), \quad y_1 = \tau + \mu(\nu), \quad z_1 = \zeta + \nu(\nu),$$

$\lambda, \mu, \nu$  désignant des fonctions d'un paramètre  $\nu$  indépendant de  $u$ .

Si dans cette position le point A ( $x_1, y_1, z_1$ ) de  $\Sigma$  est correspondant au point B ( $x, y, z$ ) de la figure primitive F, on a pour conditions d'orthogonalité de la droite BA sur la surface  $\Sigma$  :

$$\sqrt{(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2} = \frac{\rho\rho' + UU' - (z - \nu)U'}{\rho'},$$

$$\text{tang } u = \frac{y - \mu}{x - \lambda}.$$

Il s'ensuit que le lieu demandé est défini par les équations

$$x_1 = \frac{\rho(x - \lambda)}{\sqrt{(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2}} + \lambda,$$

$$y_1 = \frac{\rho(y - \mu)}{\sqrt{(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2}} + \mu,$$

$$z_1 = U + \nu.$$

Dans le cas particulier dans lequel la surface  $\Sigma$  se déplace suivant l'axe, on peut faire  $\lambda(\nu) = \mu(\nu) = 0$ ,  $\nu(\nu) = \nu$ , ce qui donne

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{\rho x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ y_1 = \frac{\rho y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ z_1 = z + \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - \rho) \rho'}{U'}. \end{array} \right.$$

La figure primitive est un point P. — Puisqu'on peut supposer  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  sans nuire à la généralité, on en déduit

$$x_1 = \rho, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \frac{a - \rho}{\Phi'(\frac{\rho}{a})},$$

d'où, en éliminant  $\rho$ ,

$$(31) \quad z_1 = \frac{a - x_1}{\Phi'(x_1)}.$$

Telle est l'équation qui définit la ligne  $L_1$ , quand on donne le point P et la surface  $\Sigma$ .

Soit donnée *a priori* la ligne  $L_1$  et soit

$$(32) \quad z_1 = \Omega(x_1)$$

son équation. En comparant les égalités (31), (32), on a l'équation

$$(33) \quad \Omega(x_1) \Phi'(x_1) + x_1 = a,$$

qu'on peut employer pour la détermination du point P, lorsque  $L_1$  et  $\Sigma$  sont données d'avance.

On obtient par l'équation (33)

$$\Phi(x_1) = \int \frac{a - x_1}{\Omega(x_1)} dx_1;$$

il s'ensuit que, lorsque le point P et la ligne  $L_1$  sont connus, la ligne méridienne de  $\Sigma$  est représentée par

l'équation

$$(34) \quad \zeta_0 = \int \frac{\alpha - \zeta_0}{\Omega(\zeta_0)} d\zeta_0.$$

EXEMPLES. — 1° Quand la surface mobile  $\Sigma$  est un paraboloides  $\left[ \zeta_0 = \Phi(\xi_0) = \frac{\xi_0^2}{k} \right]$  et la ligne  $L_1$  est l'hyperbole équilatère

$$(35) \quad z_1 x_1 = \alpha x_1 - \beta,$$

l'égalité (33) nous fournit les conditions

$$\frac{\alpha}{k} = 1 - \alpha, \quad \alpha = \frac{\beta}{k},$$

dont la deuxième fixe la position du point P.

2° Soient  $L_1$  l'hyperbole équilatère (35) et P( $\alpha$ , 0, 0) le point fixe.

L'équation (34) démontre que la surface  $\Sigma$  a pour méridienne la courbe

$$\zeta_0 = \frac{1}{\alpha} \xi_0^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\beta}{\alpha} + \alpha \right) \xi_0 - \frac{\beta}{\alpha^2} \left( \frac{\beta}{\alpha} + \alpha \right) \log(\alpha \xi_0 - \beta)$$

Parmi ces surfaces  $\Sigma$  il y a évidemment le paraboloides

$$\left( \frac{\beta}{\alpha} + \alpha = 0 \right).$$

### VIII.

*La figure primitive est une ligne L.* — La détermination de la surface  $S_1$ , lorsque L et  $\Sigma$  sont données d'avance, se fait à l'aide des équations (30).

Si, par exemple,  $\Sigma$  est un paraboloides  $\left( U = \frac{\rho^2}{k} \right)$  et si L est la droite  $x = a$ ,  $z = 0$ , le lieu  $S_1$  est la surface réglée du deuxième degré

$$\alpha x_1 z_1 - k z_1 = ak.$$

Si la surface  $S_1$  est donnée *a priori* et si

$$M(x_1, y_1, z_1) = 0$$

est son équation, on en déduit

$$(36) \quad M \left[ \frac{\rho x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\rho y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z + \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \rho}{\Phi'(\rho)} \right] = 0.$$

Quand  $(\Sigma, S_1)$  ou bien  $(L, S_1)$  sont données d'avance, la détermination de  $L$  ou de  $\Sigma$  se fait en posant la condition que l'égalité (36) soit vérifiée quel que soit  $\rho$ , ou bien quelle que soit la valeur du paramètre  $t$  en fonction duquel on a exprimé  $x, y, z$ . Pour la possibilité du problème, on doit avoir :

Dans le premier cas, deux équations entre  $x, y, z$ ; celles-ci définissent la ligne  $L$ .

Dans le deuxième cas, une seule équation entre  $\rho, \rho', U'$ ; l'intégration d'une telle équation résout le problème.

EXEMPLES. — 1° La surface mobile  $\Sigma$  est un cône [ $\zeta_0 = \Phi(\xi_0) = a\xi_0$ ] et la surface  $S_1$  un plan

$$(z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma).$$

L'équation (36) donne

$$z - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} - \gamma = \left( \frac{1}{a} - \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\beta y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \rho,$$

et l'on a les conditions

$$z = \gamma - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a},$$

$$(a^2\alpha^2 - 1)x^2 + (a^2\beta^2 - 1)y^2 + 2a^2\alpha\beta xy = 0.$$

Celles-ci définissent la ligne  $L$ . Ces équations démontrent que : *La projection de L sur le plan  $z = 0$  est une conique passant à l'origine des axes et la hauteur  $z$  est une fonction linéaire du rayon vecteur  $\sqrt{x^2 + y^2}$  d'une telle projection.*

2°  $L$  est une droite parallèle au plan  $x = 0$  et  $S_1$  la surface représentée par l'équation

$$z_1 = \frac{\alpha y_1}{x_1} + \frac{(\beta x_1 + \gamma) \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{x_1}.$$

Comme on a  $x = k$ ,  $y = j$ ,  $z = j \cot \theta$ , l'équation (36) donne

$$\left( \cot \theta - \frac{\alpha}{k} \right) j - \left( \frac{\rho'}{U'} - \frac{\gamma}{k} \right) \sqrt{x^2 - y^2} - \rho \left( \frac{\rho'}{U'} + \beta \right) = 0.$$

On a donc les conditions

$$\cot \theta - \frac{\alpha}{k} = 0, \quad \frac{\rho'}{U'} = \frac{\gamma}{k};$$

d'où, par intégration,

$$U = \frac{k}{\gamma} \rho = -\frac{1}{\beta} \rho$$

Il suit de là

$$z = k \cot \theta, \quad \frac{\gamma}{\beta} = -k.$$

et la surface de révolution mobile  $\Sigma$  est un cône

$$\left( \zeta_0 = \frac{k}{\gamma} \xi_0 \right).$$