

E. FOUYÉ

**Agrégation des sciences mathématiques
(1896). Solution du problème de
mécanique rationnelle**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 17
(1898), p. 237-244

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__237_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1896).
SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE ;**

PAR M. E. FOUYÉ,
Agrégré de Mathématiques.

Dans un plan vertical est fixé un disque circulaire A dont la circonférence est dépolie.

I. Un point pesant P est placé sans vitesse initiale sur la circonférence du disque A, dans le voisinage du point le plus haut du disque A :

1° On demande de déterminer l'angle minimum α que doit faire le rayon qui passe par le point P avec la verticale dirigée vers le haut pour que le point P cesse d'être en équilibre ;

2° Si le point P est placé sur le disque sans vitesse initiale, de manière que le rayon qui passe par le point P fasse avec la verticale un angle un peu plus grand que α , le point P glisse d'abord sur le disque, puis quitte le disque. On demande de former l'équation qui donne l'angle de la verticale avec le rayon qui passe par P, lorsque ce point P se détache du disque pour tomber librement.

II. Sur le disque circulaire A, dans le plan de ce disque, on place un deuxième disque circulaire pesant B qui est homogène et dont le rayon est égal à la moitié du rayon du disque A. La circonférence de B est dépolie, en sorte que les deux disques frottent l'un sur l'autre ; on néglige la résistance au roulement. A l'origine, le disque B est sans vitesse et le rayon du disque A aboutissant au point de contact des deux

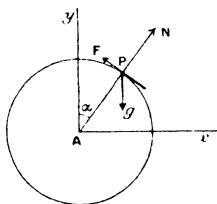
disques fait avec la verticale ascendante un angle aigu β .

Entre quelles limites doit être compris β pour que le disque B roule d'abord sans glisser sur le disque A?

En admettant que le disque B commence par rouler, étudier son mouvement et former les équations qui donnent : 1° l'angle que fait avec la verticale ascendante le rayon de A qui passe par le centre de B à l'instant où cesse le roulement simple sans glissement; 2° l'angle analogue à l'instant où le disque B se détache de A. Dans les deux questions, on désignera par f le coefficient du frottement de glissement.

I. 1° Prenons pour unité de masse la masse du point P; en ce point sont appliquées trois forces : le poids g , une force F tangente au cercle et une force

Fig. 1



normale N . Cherchons à quelles conditions le point P sera en équilibre. En projetant sur la tangente et sur la normale en P les trois forces énoncées précédemment, nous devons avoir

$$F = g \sin \alpha, \quad N = g \cos \alpha,$$

la somme des moments des forces par rapport au point P est évidemment nulle; il ne reste plus qu'à écrire l'inégalité

$$F \leq fN \quad \text{ou} \quad \tan \alpha \leq f = \tan \varphi,$$

c'est-à-dire

$$\alpha \leq \varphi.$$

Donc, dès que l'on aura $\alpha > \varphi$, le point cessera d'être en équilibre.

2° Les équations du mouvement du point sont

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha - F, \quad \frac{v^2}{\rho} = g \cos \alpha - N.$$

On a de plus

$$F = fN, \quad v = \rho \alpha' \quad (\rho, \text{ rayon du disque } A).$$

On peut donc écrire les équations du mouvement

$$\alpha'' = \frac{g}{\rho} \sin \alpha - \frac{fN}{\rho}, \quad \alpha'^2 = \frac{g}{\rho} \cos \alpha - \frac{N}{\rho}.$$

On en déduit par l'élimination de N l'équation

$$\alpha'' - f\alpha'^2 = \frac{g}{\rho} (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d\alpha'^2}{d\alpha} - f\alpha'^2 = \frac{g}{\rho} (\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

et, en intégrant,

$$\alpha'^2 = C e^{2f\alpha} + \frac{2g}{\rho(1+f^2)} [(2f^2-1) \cos \alpha - 3f \sin \alpha].$$

Pour déterminer la constante C , remarquons qu'au début du mouvement, on a

$$\alpha = \alpha_0, \quad \alpha'_0 = 0.$$

donc

$$0 = C e^{2f\alpha_0} + \frac{2g}{\rho(1+f^2)} [(2f^2-1) \cos \alpha_0 - 3f \sin \alpha_0].$$

On a donc

$$\alpha'^2 = \frac{2g}{\rho(1+f^2)} \left\{ (2f^2-1) \cos \alpha - 3f \sin \alpha - [(2f^2-1) \cos \alpha_0 - 3f \sin \alpha_0] e^{2f(\alpha-\alpha_0)} \right\}.$$

(240)

Lorsque le point P se détachera du disque pour tomber librement, on aura

$$N = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des équations du mouvement,

$$\alpha'^2 = \frac{g}{\rho} \cos \alpha.$$

L'équation demandée est donc

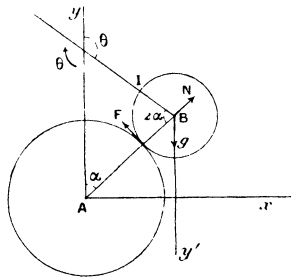
$$\frac{2}{1 + 4f^2} \left\{ (2f^2 - 1) \cos \alpha - 3f \sin \alpha \right. \\ \left. - [(2f^2 - 1) \cos \alpha_0 - 3f \sin \alpha_0] e^{2f(\alpha - \alpha_0)} \right\} = \cos \alpha$$

ou

$$3 \cos \alpha + 6f \sin \alpha + 2[(2f^2 - 1) \cos \alpha_0 - 3f \sin \alpha_0] e^{2f(\alpha - \alpha_0)} = 0.$$

II. Soit ρ le rayon du disque B, celui du disque A sera 2ρ ; prenons pour unité de masse la masse du

Fig. 2.



disque B; les équations du mouvement du centre (ξ, τ_1) du disque B seront

$$\xi'' = -F \cos \alpha + N \sin \alpha, \quad \tau_1'' = F \sin \alpha + N \cos \alpha - g.$$

On a

$$\begin{aligned} \xi &= 3\rho \sin \alpha, & \text{d'où} & \quad \xi'' = 3\rho (\cos \alpha \alpha'' - \sin \alpha \alpha'^2), \\ \tau_1 &= 3\rho \cos \alpha, & \text{d'où} & \quad \tau_1'' = -3\rho (\sin \alpha \alpha'' + \cos \alpha \alpha'^2). \end{aligned}$$

Les équations du mouvement pourront alors s'écrire

$$\begin{aligned} -F \cos \alpha + N \sin \alpha &= 3\rho(\cos \alpha \alpha'' - \sin \alpha \alpha'^2), \\ F \sin \alpha + N \cos \alpha - g &= -3\rho(\sin \alpha \alpha'' + \cos \alpha \alpha'^2). \end{aligned}$$

Multiplions-les par $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ et ajoutons, puis par $-\cos \alpha$, $\sin \alpha$ et ajoutons, nous aurons

$$\begin{aligned} (1) \quad N - g \cos \alpha &= -3\rho \alpha'^2, \\ (2) \quad F - g \sin \alpha &= -3\rho \alpha''. \end{aligned}$$

Le théorème des moments, appliqué à l'axe perpendiculaire au plan du disque B et passant par son centre donne

$$\frac{\rho^2}{2} \theta'' = \rho F \quad \text{ou} \quad \rho \theta'' = 2F,$$

θ étant l'angle d'un rayon fixe BI du disque B avec une direction fixe, la verticale descendante. Si le disque B roule sur le disque A, en choisissant convenablement le rayon fixe BI, on aura

$$\theta = 3\alpha, \quad \text{d'où} \quad \theta'' = 3\alpha'';$$

par suite, on a

$$(3) \quad 3\rho \alpha'' = 2F.$$

Éliminons F entre (2) et (3), on a

$$\alpha'' = \frac{2g}{9\rho} \sin \alpha,$$

d'où, en intégrant,

$$\alpha'^2 = \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = \frac{4g}{9\rho} (\cos \beta - \cos \alpha) \quad (\beta \text{ valeur initiale de } \alpha),$$

et, par suite,

$$(4) \quad \frac{2}{3} \sqrt{\frac{g}{\rho}} t = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\cos \beta - \cos x}}.$$

De (2) et (3) on tire

$$(5) \quad F = \frac{g \sin \alpha}{3}.$$

Au début du mouvement, on a

$$\alpha = \beta, \quad \alpha' = 0:$$

l'équation (1) donne

$$N = g \cos \beta,$$

et l'équation (5)

$$F = \frac{g \sin \beta}{3},$$

et, puisqu'il y a roulement, on a nécessairement

$$F \leq fN,$$

c'est-à-dire

$$\tan \beta \leq 3f.$$

Donc β doit être compris entre ε et ω , ω étant tel que $\tan \omega = 3f$, et ε aussi petit que l'on veut, mais $\neq 0$; pour $\varepsilon = 0$, il y a équilibre.

Supposons β ainsi choisi; le mouvement du centre du disque B est alors donné par l'équation (4); on doit avoir

$$\cos \beta > \cos \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha > \beta,$$

α va donc en augmentant, le radical doit être pris avec le signe +.

On a

$$N = g \cos \alpha - 3\rho\alpha'^2 = \frac{g}{3}(7 \cos \alpha - 4 \cos \beta),$$

$$F = \frac{g \sin \alpha}{3};$$

α allant en augmentant, F augmente et N diminue; il arrivera un moment où l'on aura

$$F = fN,$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad \sin \alpha - f(7 \cos \alpha - 4 \cos \beta) = 0.$$

Pour $\alpha = \beta$, on a

$$\sin \beta - 3f \cos \beta < 0, \quad \text{car} \quad \tan \beta < 3f;$$

(243)

pour $\alpha = 90^\circ$, on a

$$1 + 4f \cos \beta > 0.$$

Donc l'équation (6) admet une racine β_1 comprise entre β et 90° .

Le roulement simple sans glissement cessera donc, dès que α atteindra la valeur β_1 . A partir de ce moment, les équations du mouvement changent; ce sont

$$\begin{aligned} N - \mathcal{G} \cos \alpha &= -3\rho \alpha'', \\ F - \mathcal{G} \sin \alpha &= -3\rho \alpha'', \\ \rho \theta'' &= 2F \quad \text{et} \quad F = fN. \end{aligned}$$

Éliminons N entre les deux premières, où l'on a remplacé F par fN , nous aurons

$$(7) \quad \alpha'' - f\alpha'^2 = \frac{\mathcal{G}}{3\rho} (\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

d'où

$$\alpha'^2 = C e^{2f\alpha} + \frac{2\mathcal{G}}{3\rho(1+4f^2)} [(2f^2-1) \cos \alpha - 3f \sin \alpha].$$

Pour déterminer la constante C , écrivons que pour $\alpha = \beta_1$,

$$\alpha'^2 = \frac{4\mathcal{G}}{9\rho} (\cos \beta - \cos \beta_1).$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} &\frac{4\mathcal{G}}{9\rho} (\cos \beta - \cos \beta_1) \\ &= C e^{2f\beta_1} + \frac{2\mathcal{G}}{3\rho(1+4f^2)} [(2f^2-1) \cos \beta_1 - 3f \sin \beta_1], \end{aligned}$$

avec

$$\sin \beta_1 = f(7 \cos \beta_1 - 4 \cos \beta).$$

L'équation (7) montre que le centre du disque B se meut comme un point pesant placé sur un disque concentrique à A , de rayon 3ρ , la pesanteur et le coefficient de frottement restant les mêmes.

On a

$$\begin{aligned}\theta'' &= \frac{2F}{\rho} = \frac{2fN}{\rho} = 2f \left(\frac{\kappa}{\rho} \cos \alpha - 3\alpha'^2 \right), \\ \theta'' &= 6f \left[\frac{\kappa}{\rho(1+4f^2)} (\cos \alpha + 2f \sin \alpha) - C e^{2f\alpha} \right], \\ F &= \frac{\rho \theta''}{2}, \quad N = \frac{\rho \theta''}{2f}.\end{aligned}$$

Le disque B quittera le disque A lorsque N s'annulera, c'est-à-dire lorsque θ'' s'annulera; l'angle α correspondant sera donné par l'équation

$$\frac{\kappa}{\rho(1+4f^2)} (\cos \alpha + 2f \sin \alpha) - C e^{2f\alpha} = 0.$$