

MAURICE D'OCAGNE

**Sur la détermination des courbes par une
équation entre les distances tangentielles
de leurs points à des courbes données**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 17
(1898), p. 115-118

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__115_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[02q]

**SUR LA DÉTERMINATION DES COURBES PAR UNE ÉQUATION
ENTRE LES DISTANCES TANGENTIELLES DE LEURS POINTS
A DES COURBES DONNÉES;**

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Si $M_1 A = l_1$, $M_2 A = l_2$, ..., $M_n A = l_n$ sont les distances tangentielles du point A aux courbes (M_1) , (M_2) , ..., (M_n) , l'équation

$$F(l_1, l_2, \dots, l_n) = 0$$

définit une courbe (A) .

Pour que les points de cette courbe soient déterminés sans ambiguïté, il faut que le signe des distances $l_1, l_2, \dots, l_n$ soit défini avec précision.

Rappelons la convention que nous avons adoptée dans notre *Cours de Géométrie infinitésimale*. Prenant pour sens positif d'une courbe en un point le sens direct (trigonométrique positif) de son cercle osculateur en ce point, nous étendons ce sens positif à toute

la tangente; dès lors le sens positif de la normale est celui qui va du point considéré sur la courbe vers le centre de courbure correspondant ⁽¹⁾ (*loc. cit.*, p. 261).

On peut donc dire que la distance l_i sera prise positivement ou négativement suivant que le segment M_iA de la tangente, considéré comme une force appliquée en M_i , tendra à faire tourner le rayon de courbure $M_i\mu_i$ autour du centre de courbure μ_i dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

La détermination de la normale en A à la courbe (A) résulte du théorème suivant, donné dans notre *Cours* (p. 271) :

Si, sur la tangente AM_i , on porte le segment $AL_i = \frac{\partial F}{\partial l_i}$ et si la perpendiculaire élevée à cette tangente en L_i coupe au point λ_i la droite qui joint le point A au centre de courbure μ_i répondant au point M_i , la normale en A à la courbe (A) est dirigée suivant le vecteur résultant des vecteurs $A\lambda_i$.

Il suffit d'ajouter que chaque segment AL_i doit être porté sur la tangente correspondante (dont le sens positif a été ci-dessus défini) *en tenant compte de son signe*.

Si la courbe (M_i) est un cercle, on peut, du point A, lui mener deux tangentes AM_i et AM'_i , et si l_i et l'_i sont les longueurs de ces tangentes prises avec leurs signes, on a

$$l_i + l'_i = 0.$$

(¹) Si la courbe se réduit à un point, on peut choisir indifféremment le sens positif sur une droite passant par ce point, mais une fois ce choix fait, le sens positif de la direction normale est parfaitement défini; c'est celui que l'on obtient en faisant tourner de 90°, dans le sens direct, la partie positive de la première droite.

Si donc on a, pour chaque point de la courbe (A),

$$F(l_1, \dots, l_i, \dots, l_n) = 0,$$

on a aussi

$$F(l_1, \dots, -l'_i, \dots, l_n) = 0.$$

La normale obtenue en partant de l'une ou de l'autre équation doit donc être la même, c'est-à-dire que le vecteur $A\lambda_i$ doit être le même dans les deux cas.

Or, on a évidemment

$$\frac{\partial F}{\partial l_i} + \frac{\partial F}{\partial l'_i} = 0.$$

En d'autres termes, les segments AL_i et AL'_i sont égaux et de signes contraires, de même que les segments AM_i et AM'_i , et comme la droite $A\mu_i$ est la bissectrice de l'angle $M_iAM'_i$ on voit immédiatement que le point λ_i est le même dans les deux cas.

Remarque. — On peut changer à la fois le sens de tous les segments $A\lambda_i$. La direction de leur résultante reste la même. Donc, au lieu de porter à partir de A sur chaque segment M_iA le segment $Al_i = \frac{\partial F}{\partial l_i}$, on peut porter le segment $AL_i = -\frac{\partial F}{\partial l_i}$.

EXEMPLE. — Supposons que l'équation donnée soit $\Sigma l_i^2 = k^2$. Dès lors $\frac{\partial F}{\partial l_i} = l_i$. Nous pouvons donc prendre $AL_i = -l_i$, ce qui, quel que soit le signe de M_iA , fait coïncider L_i avec M_i et, par suite, λ_i avec μ_i . Donc, dans ce cas, la normale est dirigée suivant le vecteur résultant des vecteurs $A\mu_i$; en d'autres termes, elle passe par le centre de gravité des centres de courbure μ_i . On retrouve ainsi un cas particulier d'un théorème

de M. J. Pomey (*Nouvelles Annales*, 1889, p. 527),
que, dans le cas général, nous avons déjà rattaché
à notre théorème (*Nouvelles Annales*, 1890; p. 291).