G. FONTENÉ

Sur un quadrangle mobile

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 101-106
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__101_0>

[M¹2e]

SUR UN QUADRANGLE MOBILE;

PAR M. G. FONTENÉ,
Professeur au Collège Rollin.

1. Étant données deux droites Ox, Oy et une conique Σ, la correspondance établie entre un point A de Ox et un point B de Oy, par la condition que la droite AB soit tangente à la conique Σ, est une correspondance doublement quadratique, telle que, si l'un des points A et B est en O, les deux positions de l'autre point sont confondues en O : cela forme trois conditions et la correspondance dépend de cinq paramètres, comme la conique. Si l'on pose $OA = a$, $OB = b$, l'équation tangentielle de la conique est

$$\frac{A}{a^2} + \frac{B}{ab} + \frac{C}{b^2} + \frac{D}{a} + \frac{E}{b} + F = 0,$$

d'où résulte la relation doublement quadratique

$$Fa^2b^2 + Ea^2b + Dab^2 + Ca^2 + Bab + Aa^2 = 0,$$

sans terme indépendant, sans terme du premier degré. La réciproque est exacte.

On a un fait corrélatif, dont la réciproque s'énonce ainsi :

Étant donnés deux points O *et* O′ *sur une droite* ω, *si les droites a et b issues de ces deux points ont une correspondance doublement quadratique, telle que, quand l'une des droites a et b prend la position* ω, *les deux positions de l'autre droite se confondent en* ω, *le lieu du point d'intersection des droites a et b est une conique* S.

2. Soit un quadrilatère complet (le lecteur est prié de faire la figure) dont les trois couples de sommets sont $O_1 \Omega_1$, $O_2 \Omega_2$, $O_3 \Omega_3$, les sommets O_1, O_2, O_3 étant en ligne droite : considérons deux coniques S_1, S_2 (deux cercles par exemple) respectivement conjuguées par rapport aux triangles $\Omega_1 O_2 O_3$, $\Omega_2 O_1 O_3$, et envisageons successivement les deux divisions de points $O_3 O_2 O_1$, $O_3 \Omega_1 \Omega_2$. Relativement à la première, les côtés *a*, *b*, *c* d'un triangle mobile ABC passent par les trois points fixes O_1, O_2, O_3, les sommets A et B décrivent les coniques S_1 et S_2, et l'on cherche le lieu du sommet C. Rappelons d'abord que, quand une conique S_1 est conjuguée par rapport à un triangle $\Omega_1 O_2 O_3$, un point A de cette conique donne lieu à un quadrangle inscrit $A A_1 A_2 A_3$, dont les couples de côtés opposés se croisent aux trois sommets du triangle conjugué. Cela posé, si l'on mène par le sommet O_2 du triangle $\Omega_1 O_2 O_3$ les droites *b* et *b'* conjuguées par rapport aux côtés issus de O_2, elles coupent S_1 aux quatre points $A A_2$, $A_3 A_1$, la lettre A se rapportant à S_1, l'indcie de AA_2 se rapportant à O_2, et les deux droites AA_3, $A_1 A_2$, ou *c* et *c'*, passent en O_3 et sont conjuguées par rapport aux côtés du triangle issus de O_3 ; comme la conique S_2 est conjuguée par rapport au triangle $\Omega_2 O_1 O_3$, dont les côtés issus de O_3 sont portés par les mêmes droites que ceux du premier triangle, les droites *c* et *c'* coupent cette conique S_2 aux quatre points BB_3, $B_1 B_2$, tels que les deux droites BB_1, $B_2 B_3$, ou *a* et *a'*, passent en O_1 et sont conjuguées par rapport aux côtés du triangle issus de O_1 ; il existe donc entre les droites *a* et *b* une correspondance doublement quadratique, laquelle satisfait aux conditions du n° 1, et le point C d'intersection des droites *a* et *b* décrit une conique S_3 ; d'ailleurs, si l'on considère le triangle $\Omega_3 O_1 O_2$, les droites *a*, *a'* et les

droites b, b' sont respectivement conjuguées par rapport aux côtés de ce triangle issus de O_1 et de O_2, et la conique S_3, qui passe par les points d'intersection C, C_1, C_2, C_3 des droites a, a' avec les droites b, b', est conjuguée par rapport à ce triangle. Il est facile de voir que cette conique passe par les points communs aux coniques S_1 et S_2, les trois points A, B, C pouvant être confondus avec l'un de ces points. Les notations sont résumées dans le Tableau :

a,	a'	b,	b'	c,	c'
BB_1,	B_2B_3	CC_2,	C_3C_1	AA_3,	A_1A_2
CC_1,	C_2C_3	AA_2,	A_3A_1	BB_3,	B_1B_2,

qui permet en même temps de suivre la démonstration en le lisant à partir de AA_2, A_3A_1.

On a maintenant trois coniques S_1, S_2, S_3. En conservant d'abord les deux coniques S_1, S_2 et en remplaçant la division de points $O_3O_2O_1$ par la division $O_3\Omega_1\Omega_2$ les côtés α, β, c d'un triangle mobile ABD passent, de même, par les trois points fixes Ω_1, Ω_2, O_3, α étant DA, β étant DB, les sommets A et B décrivent les coniques S_1 et S_2, et le sommet D décrit une conique S, conjuguée par rapport au triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ et passant par les points communs aux coniques S_1, S_2, S_3. D'ailleurs, les droites AA_1, A_2A_3, ou α, α', passent en Ω_1 et sont conjuguées par rapport aux côtés du triangle $\Omega_1O_2O_3$ issus de Ω_1 ou par rapport aux côtés du triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$, et de même les droites BB_2, B_3B_1, ou β, β', passent en Ω_2 et sont conjuguées par rapport aux côtés du triangle $\Omega_2O_1O_3$ issus de Ω_2, ou par rapport aux côtés du triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$: les droites α, α' coupent les droites β, β' aux quatre points D, D_1, D_2, D_3, situés sur la conique S. En prenant, d'autre part, les coniques S_1 et S_3, conjuguées par rapport aux triangles $\Omega_1O_3O_2$ et $\Omega_3O_1O_2$, et en prenant par exemple la division de points $O_2\Omega_1\Omega_3$, on mène par Ω_1 les sécantes α et α' qui coupent la conique S_1 aux points AA_1, A_2A_3, on passe par les droites AA_2, A_1A_3, ou b, b', issues de O_2, qui coupent la conique S_3 aux points CC_2, C_1C_3, et l'on obtient les droites CC_3, C_1C_2, ou γ, γ', passant en Ω_3 : les droites α, α' coupent les droites γ, γ' en quatre points situés sur la conique S, et ces points sont nécessairement les points d'intersection D, D_1, D_2, D_3 de cette conique avec les droites α et α'. On a le Tableau :

α,	α'	β,	β'	γ,	γ'
AA_1,	A_2A_3	BB_2,	B_3B_1	CC_3,	C_1C_2
DD_1,	D_2D_3	DD_2,	D_3D_1	DD_3,	D_1D_2.

On peut alors énoncer ce théorème :

Étant donné un quadrilatère complet, si l'on considère quatre coniques respectivement conjuguées par rapport aux quatre triangles du quadrilatère et formant un faisceau, d'où il résulte que deux d'entre elles peuvent être prises arbitrairement et déterminent complètement les deux autres, un quadrangle mobile ABCD *peut avoir ses sommets situés respectivement sur les quatre coniques, les six côtés a, b, c, α, β, γ passant respectivement par les six sommets du quadrilatère.*

On peut prendre, par exemple, les quatre cercles conjugués par rapport aux quatre triangles du quadrilatère. On a un théorème corrélatif.

La figure fixe dépend de douze paramètres ; on peut se donner les deux coniques S_1, S_2 et la droite indéfinie $O_1O_2O_3$, prendre ses pôles Ω_1 et Ω_2 par rapport aux deux coniques, etc. ; le cas singulier où la droite $O_1O_2O_3$ est tangente aux deux coniques a été donné par M. Williamson (*voir* Salmon, *Sections coniques*), et c'est de là que m'est venue l'idée du théorème général.

Les six côtés a, b, c, α, β, γ du quadrangle mobile ABCD donnent lieu à six droites a', b', c', α', β', γ' respectivement conjuguées des premières par rapport aux côtés des angles O_1, O_2, O_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3 du quadrilatère, et de là résultent quatre quadrangles $AA_1A_2A_3$, $BB_1B_2B_3$, ..., respectivement inscrits aux quatre coniques S_1, S_2, S_3, S et non comparables au quadrangle ABCD. Ces quatre quadrangles donnent lieu à deux séries de quatre quadrangles tels que ceux du théorème, et dont les sommets sont indiqués par les lignes et les colonnes du Tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ D_1 & C_1 & B_1 & A_1 \\ C_2 & D_2 & A_2 & B_2 \\ B_3 & A_3 & D_3 & C_3 : \end{array}$$

la droite a, qui contient les quatre points B, B_1, C, C_1, porte les côtés BB_1 et CC_1 des quadrangles $BB_1B_2B_3$ et $CC_1C_2C_3$ inscrits à S_2 et à S_3 et les côtés BC, B_1C_1, BC_1, B_1C de quatre des huit quadrangles du Tableau; sa conjuguée a' contient les quatre points B_2, B_3, C_2, C_3, etc. Si l'on se donne D, on obtient les deux quadrangles DABC et $DA_1B_2C_3$.

3. La correspondance établie entre les points A et C des coniques S_1 et S_3, par le fait que la droite AC passe en O_2, est une correspondance doublement quadratique; il en est de même de la correspondance établie entre les points C et B des coniques S_3 et S_2, par le fait que la droite CB passe en O_1, et il arrive que la correspondance résultante entre les points A et B des coniques S_1 et S_2 se décompose en deux correspondances

doublement quadratiques, dont l'une consiste en ce que la droite AB passe par le point O_3. Cela exige (*Nouvelles Annales*, p. 437; 1897) que les positions du point C qui donnent deux points A confondus donnent aussi deux points B confondus, et il en résulte que les tangentes menées de O_1 à S_2 et de O_2 à S_1 doivent se couper sur S_3.