

L. RAVUT

**Extension du théorème de Cauchy aux
fonctions d'une variable complexe
de la forme $\rho e^{ie^{IA}\alpha}$**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16
(1897), p. 365-367

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__365_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D3b]

**EXTENSION DU THÉORÈME DE CAUCHY AUX FONCTIONS
D'UNE VARIABLE COMPLEXE DE LA FORME $\rho e^{ie^{1A}\alpha}$;**

PAR M. L. RAVUT.

Cauchy a démontré le premier, dans le cas d'une variable complexe de la forme $\rho e^{i\alpha}$, le théorème suivant qui porte son nom :

Si $f(z)$ est une fonction de la variable complexe $z = \rho e^{i\alpha}$, uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire S, l'intégrale

$$\int_S f(z) dz,$$

prise le long du contour de cette aire, est nulle.

On peut étendre ce théorème aux courbes fermées de l'espace, situées sur des surfaces coniques ayant pour sommet l'origine des coordonnées ou situées sur des plans renfermant cette origine.

Dans ce cas, la variable complexe z est égale à $\rho e^{ie^{1A}\alpha}$, c'est-à-dire à $\rho (\cos \alpha + i \sin \alpha \cos A + i I \sin \alpha \sin A)$. ρ est le module de z ; l'angle α représente le déplacement de ρ dans le plan et l'angle A le déplacement du plan lui-même. Les symboles d'opérations i , I satisfont d'ailleurs aux relations

$$i^2 = -1, \quad I^2 = -1, \quad iI = -Ii.$$

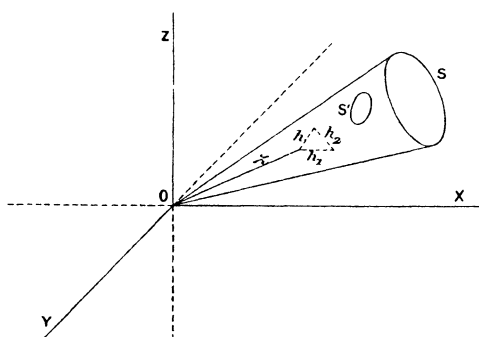
Si l'on a $A = \text{constante}$ ou $= 0$, ρ et α étant variables, z se meut dans un même plan.

THÉOREME DE CAUCHY GÉNÉRALISÉ. — Si $f(z)$ est une fonction de la variable complexe $z = \rho e^{i\alpha}$, uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire de la surface conique OS ou de la surface S' faisant partie de OS, les intégrales

$$\int_S f(z) dz, \quad \int_{S'} f(z) dz,$$

prises le long des contours, S, S' seront nulles.

Pour démontrer ce théorème, considérons un triangle infinitésimal ayant pour sommet l'extrémité de z et pour



côtés les vecteurs h , h_1 et h_2 . Nous avons

$$h = h_1 + h_2.$$

Il en résulte que l'on a identiquement

$$(1) \quad f(z+h)h - f(z+h)h_1 - f(z+h)h_2 = 0.$$

Toutes les fois que le premier membre de cette identité interviendra comme élément dans une limite de somme, on pourra, en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs au premier, lui substituer l'une ou

l'autre des expressions suivantes :

$$(2) \quad f(z)h - f(z)h_1 - f(z+h_1)h_2,$$

$$(3) \quad f(z+h)h - f(z+h_1)h_1 - f(z+h)h_2,$$

et cela sans changer le résultat final.

Les expressions (2) et (3) nous montrent que, lorsqu'on multiplie la fonction $f(z)$ par l'accroissement de la variable, on peut, dans la substitution que nous avons en vue, prendre indifféremment pour valeur de z dans $f(z)$ sa valeur initiale ou sa valeur finale.

Cela étant, je dis que l'on aura

$$\int_s f(z) dz = 0.$$

Pour l'établir, coupons la surface OS à l'aide de surfaces sphériques infiniment voisines ayant pour centre commun le point O, et traçons sur elle des rayons vecteurs infiniment rapprochés. En joignant deux à deux par des droites les points de rencontre consécutifs, nous formerons un certain nombre de polygones élémentaires, que nous pourrions décomposer en triangles.

Si l'on applique l'identité (1) à chacun de ces triangles, en les parcourant tous dans le sens direct, on aura identiquement

$$\Sigma [f(z+h)h - f(z+h)h_1 - f(z+h)h_2] = 0.$$

Mais comme l'on peut, sans altérer la limite de la somme, substituer à un produit, tel que $f(z+h)h$, le produit $f(z)h$, tous les produits correspondant aux lignes intérieures se détruiront deux à deux; car, si dans un triangle l'on a le produit $f(z)h$, dans l'un des triangles contigus l'on aura le produit $-f(z+h)h$, auquel on pourra substituer le produit $-f(z)h$. Il ne restera donc que les produits se rapportant au contour. Par suite, l'on aura

$$\int_s f(z) dz = 0.$$