

PAUL APPELL

Développement en séries trigonométriques des polynômes de M. Léauté

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16
(1897), p. 265-268

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__265_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D1b]

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES
DES POLYNOMES DE M. LÉAUTÉ;

PAR M. PAUL APPELL.

Pour exprimer une fonction $f(x)$, connaissant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées dans un intervalle donné, de $-h$ à $+h$, par exemple. M. Léauté (*Comptes rendus*, 14 juin 1880; *Journal de Liouville*, 1881) a considéré une suite de polynomes $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ de degrés 0, 1, 2, ..., n en x , possédant les propriétés caractéristiques suivantes :

$$(1) \quad P_0 = 1;$$

$$(2) \quad \frac{dP_n}{dx} = P_{n-1}, \quad n \geq 1;$$

$$(3) \quad \int_{-h}^{+h} P_n dx = 0, \quad n \geq 1.$$

La relation (2) permet de déduire chaque polynome du précédent par une quadrature, et la condition (3)

détermine la constante arbitraire introduite par cette quadrature.

Ces polynômes P_n sont homogènes et de degré n en x et h . Mettons ces deux quantités en évidence en appelant le polynôme

$$P_n(x, h).$$

Nous ramènerons h à avoir la valeur π , en faisant

$$x = \frac{hx'}{\pi};$$

on a alors

$$P_n(x, h) = P_n\left(\frac{h}{\pi}x', h\right) = \frac{h^n}{\pi^n} P_n(x', \pi)$$

Les polynômes $P_n(x', \pi)$ possèdent donc les propriétés caractéristiques suivantes

$$P_0 = 1, \quad \frac{dP_n}{dx'} = P_{n-1}, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} P_n dx' = 0, \quad n \geq 1.$$

Le polynôme P_1 est égal à x' . On sait que dans les limites $-\pi$ et $+\pi$, x' peut être représenté par la série trigonométrique

$$(4) \quad P_1 = x' = 2 \left(\sin x' - \frac{1}{2} \sin 3x' + \frac{1}{3} \sin 5x' - \dots \right)$$

(voir BERTRAND, *Calcul intégral*, n° 531).

On a ainsi le développement de P_1 entre $-\pi$ et $+\pi$.

Pour avoir celui de P_2 , multiplions par dx' les deux membres de (4) et intégrons; il vient

$$P_2 = c_2 - 2 \left(\cos x' - \frac{1}{4} \cos 3x' + \frac{1}{9} \cos 5x' - \dots \right),$$

où c_2 est une constante d'intégration, car P_2 est une fonction primitive de P_1 . Pour déterminer c_2 , écrivons

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_2 dx' = 0.$$

Nous aurons, en remplaçant P_2 par la série et remarquant que tous les termes $\cos x'$, $\cos 2x'$, ... ont leurs intégrales nulles,

$$2\pi c_2 = 0, \quad c_2 = 0,$$

donc

$$(5) \quad P_2 = -2 \left(\cos x' - \frac{1}{2^2} \cos 2x' + \frac{1}{3^2} \cos 3x' - \dots \right).$$

Intégrant de nouveau et déterminant de même la constante d'intégration par la condition

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_3 dx' = 0,$$

on trouve qu'elle est nulle, et l'on a

$$(6) \quad P_3 = -2 \left(\sin x' - \frac{1}{2^3} \sin 2x' + \frac{1}{3^3} \sin 3x' - \dots \right);$$

et ainsi de suite. En général, m étant un entier positif,

$$P_{2m} = (-1)^m 2 \left(\cos x' - \frac{1}{2^{2m}} \cos 2x' + \frac{1}{3^{2m}} \cos 3x' - \dots \right),$$

$$P_{2m+1} = (-1)^m 2 \left(\sin x' - \frac{1}{2^{2m+1}} \sin 2x' + \frac{1}{3^{2m+1}} \sin 3x' - \dots \right).$$

Ces formules donnent, en particulier, les valeurs asymptotiques des polynômes P_n pour n très grand.

Si l'on revient à la variable x , on a

$$x' = \frac{\pi x}{h},$$

$$P_n(x, h) = \frac{h^n}{\pi^n} P_n(x', \pi).$$

Donc, pour n pair, $n = 2m$,

$$P_{2m} = (-1)^m 2 \frac{h^{2m}}{\pi^{2m}} \left(\cos \frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m}} \cos \frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m}} \cos \frac{3\pi x}{h} - \dots \right),$$

et pour n impair, $n = 2m + 1$,

$$P_{2m+1} = (-1)^m 2 \frac{h^{2m+1}}{\pi^{2m+1}} \left(\sin \frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m+1}} \sin \frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m+1}} \sin \frac{3\pi x}{h} - \dots \right).$$

Ces développements font ressortir les rapports signalés par M. Halphen entre les polynomes de M. Léauté et les polynomes de Bernoulli.

Ils se rattachent également à deux questions posées par M. Cesàro dans l'*Intermédiaire* (mars 1897), questions 1019 et 1017.

Faisons, en effet, $h = 1$, et désignons par $\varphi_{2m}(x)$ et $\varphi_{2m+1}(x)$ les deux séries ci-dessus

$$\varphi_{2m}(x) = \cos \pi x - \frac{1}{2^m} \cos 2\pi x + \frac{1}{3^{2m}} \cos 3\pi x - \dots,$$

$$\varphi_{2m+1}(x) = \sin \pi x - \frac{1}{2^{2m+1}} \sin 2\pi x + \frac{1}{3^{2m+1}} \sin 3\pi x - \dots$$

On a évidemment

$$\begin{aligned} \varphi_{2m}(x) - \varphi_{2m}(x+1) \\ = 2 \left(\cos \pi x - \frac{1}{3^{2m}} \cos 3\pi x + \frac{1}{5^{2m}} \cos 5\pi x - \dots \right). \end{aligned}$$

C'est la série considérée par M. Cesàro dans la question 1019.

De même

$$\begin{aligned} \varphi_{2m+1}(x) - \varphi_{2m+1}(x-1) \\ = 2 \left(\sin \pi x + \frac{1}{3^{2m+1}} \sin 3\pi x - \frac{1}{5^{2m+1}} \sin 5\pi x + \dots \right). \end{aligned}$$