Nouvelles annales de mathématiques

N. Saltykow

Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 245-249

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__245_1>

[R4b]

SUR LES INTÉGRALES COMMUNES A PLUSIEURS PROBLÈMES SUR L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE;

PAR M. N. SALTYKOW.

Soient X, Y, Z les composantes, suivant trois axes rectangulaires, de la force rapportée à l'unité de masse d'un fil flexible et inextensible; x, y, z les coordonnées d'un élément; k la densité; T la tension, regardées comme fonctions de l'arc s du fil. Les équations différentielles de l'équilibre du fil sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)+k\mathrm{X}=0,\\ &\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)+k\mathrm{Y}=0,\\ &\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right)+k\mathrm{Z}=0,\\ &\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1. \end{aligned}\right.$$

I. Soient k une constante, X, Y, Z des fonctions de x, y, z, ou k une fonction de s, X, Y, Z dépendant de s, x, y, z.

S'il existe la condition

$$\frac{X}{x+a_1} - \frac{Y}{y+a_2} + \frac{Z}{z+a_3},$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes arbitraires, les équations (1) ont trois intégrales

$$T\left[(y+a_2)\frac{dx}{ds} - (x+a_1)\frac{dy}{ds}\right] = C_1,$$

$$T\left[(z+a_3)\frac{dx}{ds} - (x+a_1)\frac{dz}{ds}\right] = C_2,$$

$$\frac{z+a_3}{x+a_1} - \frac{(z+a_3)\dfrac{dx}{ds} - (x+a_1)\dfrac{dz}{ds}}{(y+a_2)\dfrac{dx}{ds} - (x+a_1)\dfrac{dy}{ds}}\,\frac{y+a_2}{x+a_1} = C_3,$$

C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires.

II. Soient k une constante, X, Y, Z des fonctions de x, y, z.

1. S'il existe la condition

$$\frac{(y+a_5)a_9 + (x+a_1)a_{10}}{\left\{\begin{array}{l}[(z+a_2y+a_3)(y+a_5)+(a_6y+a_8)(x+a_1)]X \\ \quad -[(z+a_6x+a_7)(x+a_1)+(a_2x-a_4)(y+a_5)]Y\end{array}\right\}}$$
$$= \frac{(z+a_6x+a_7)a_9 + (a_4-a_2x)a_{10}}{\left\{\begin{array}{l}[(z+a_2y+a_3)(z+a_6x+a_7)+(a_6y+a_8))(a_4-a_2x)]X \\ \quad -[(z+a_6x+a_7)(x+a_1)+(a_2x-a_4)(y+a_5)]Z\end{array}\right\}} = k,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ étant des constantes arbitraires, les équations (1) admettent deux intégrales

$$T\left[(z-a_2y+a_3)\frac{dx}{ds} - (a_2x-a_4)\frac{dy}{ds} - (x+a_1)\frac{dz}{ds}\right] + a_9 s = C_1,$$

$$T\left[(a_6y+a_8)\frac{dx}{ds} - (z+a_6x+a_7)\frac{dy}{ds} + (y+a_5)\frac{dz}{ds}\right] + a_{10}s = C_2.$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

En effet, on a

$$S_1 = V_1 \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) - \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + U_1 = 0,$$
$$S_2 = V_2 \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) - \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + U_2 = 0,$$

relations où l'on a posé

$$V_1 = \frac{(z + a_2 y + a_3)(y + a_5) + (a_6 y + a_8)(x + a_1)}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)},$$
$$V_2 = \frac{(z + a_2 y + a_3)(z + a_6 x + a_7) + (a_3 y + a_8)(a_4 - a_2 x)}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)},$$
$$U_1 = \frac{(y + a_5) a_9 + (x + a_1) a_{10}}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)},$$
$$U_2 = \frac{(z + a_6 x + a_7) a_9 + (a_4 - a_2 x) a_{10}}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)}.$$

Il est évident que

$$(a_2 x - a_4)V_1 + (x + a_1)V_2 = z + a_2 y + a_3,$$
$$(z - a_6 x + a_7)V_1 - (y + a_5)V_2 = a_6 y + a_8,$$
$$(a_2 x - a_4)U_1 + (x + a_1)U_2 = a_9,$$
$$(z - a_6 x + a_7)U_1 - (y + a_5)U_2 = a_{10}.$$

Il s'ensuit que les premiers membres des équations

$$(a_2 x - a_4)S_1 + (x + a_1)S_2 = 0,$$
$$(z - a_6 x + a_7)S_1 - (y + a_5)S_2 = 0$$

sont des dérivées exactes :

$$\frac{d}{ds}\left\{T\left[(z + a_2 y + a_3)\frac{dx}{ds} - (a_2 x - a_4)\frac{dy}{ds} - (x + a_1)\frac{dz}{ds}\right] + a_9 s\right\},$$
$$\frac{d}{ds}\left\{T\left[(a_6 y - a_8)\frac{dx}{ds} - (z + a_6 x + a_7)\frac{dz}{ds} + (y + a_5)\frac{dy}{ds}\right] - a_{10} s\right\}.$$

2. S'il existe la condition

$$k[a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4(yZ - zY) - a_5(zX - xZ) + a_6(xY - yX)] = a_7,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_7$ étant des constantes arbitraires, les équations (1) ont l'intégrale

$$\mathrm{T}\left[a_1\frac{dx}{ds} + a_2\frac{dy}{ds} + a_3\frac{dz}{ds} + a_4\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right)\right.$$
$$\left. + a_5\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) + a_6\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)\right] + a_7 s = \mathrm{C};$$

C est une constante arbitraire.

III. — 1. S'il existe la condition

$$\frac{(y+a_5)\Psi_1(s) + (x+a_1)\Psi_2(s)}{\left\{\begin{array}{l}[(z+a_2y+a_3)(y+a_5) + (a_6y+a_8)(x+a_1)]\mathrm{X} \\ \quad -[(z+a_6x+a_7)(x+a_1) + (a_2x-a_4)(y+a_5)]\mathrm{Y}\end{array}\right\}}$$
$$= \frac{(z+a_6x+a_7)\Psi_1(s) + (a_4-a_2x)\Psi_2(s)}{\left\{\begin{array}{l}[(z+a_2y+a_3)(z+a_6x+a_7) + (a_6y+a_8)(a_4-a_2x)]\mathrm{X} \\ \quad -[(z+a_6x+a_7)(x+a_1) + (a_2x-a_4)(y+a_5)]\mathrm{Z}\end{array}\right\}} = k,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_8$ étant des constantes arbitraires, Ψ_1, Ψ_2 des fonctions arbitraires, les équations (1) admettent deux intégrales

$$\mathrm{T}\left[(z+a_2y+a_3)\frac{dx}{ds} - (a_2x+a_4)\frac{dy}{ds} - (x+a_1)\frac{dz}{ds}\right] + \int\Psi_1(s)\,ds = \mathrm{C}_1,$$

$$\mathrm{T}\left[(a_6y+a_8)\frac{dx}{ds} - (z+a_6x+a_7)\frac{dy}{ds} + (y+a_5)\frac{dz}{ds}\right] + \int\Psi_2(s)\,ds = \mathrm{C}_2,$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

2. S'il existe la condition

$$k[a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{Y} + a_3\mathrm{Z} + a_4(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})$$
$$+ a_5(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) - a_6(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})] = \Psi(s),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_6$ étant des constantes arbitraires, Ψ une fonction arbitraire de s, les équations (1) ont l'intégrale

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\Big[a_1\frac{dx}{ds}&+a_2\frac{dy}{ds}+a_3\frac{dz}{ds}\\&+a_4\left(y\frac{dz}{ds}-z\frac{dy}{ds}\right)\\&+a_5\left(z\frac{dx}{ds}-x\frac{dz}{ds}\right)\\&+a_6\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)\Big]+\int\Psi(s)\,ds=\mathrm{C};\end{aligned}$$

C est une constante arbitraire.

Ayant appliqué la théorie [1] de M. Korkine pour résoudre le problème [2] de M. Bertrand sur les intégrales des équations (1), j'ai trouvé les cinq cas cités. Ils sont les seuls, quand il y a des intégrales communes à plusieurs problèmes sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible soumis à l'action d'une force, rapportée à l'unité de masse du fil et dont les composantes sur trois axes rectangulaires de coordonnées x, y, z sont des fonctions de x, y, z et de l'arc s.