NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Détermination des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 65-68

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__65_1>

[K15b] DÉTERMINATION DES POINTS D'INFLEXION DANS LE DÉVELOPPEMENT DE LA SECTION PLANE D'UN CONE;

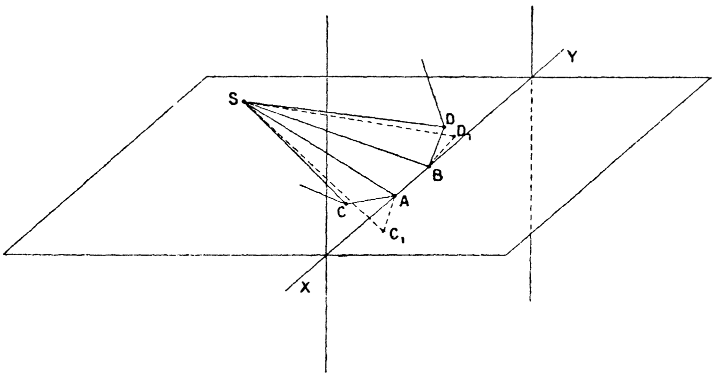
PAR M. F. BALITRAND,
Lieutenant du Génie à Montpellier.

Dans le numéro du mois de décembre 1894 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, M. Carvallo a critiqué, avec raison, la méthode classique employée pour déterminer les points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône. Nous allons donner deux démonstrations, à l'abri de tout reproche, croyons-nous, du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si, en un point* A *d'une section plane d'un cône, le plan sécant est normal à la surface, sans être perpendiculaire à la génératrice qui passe en ce point, le développement de la section présente un point d'inflexion au point qui correspond au point* A.

Considérons une pyramide SABCD... inscrite dans le cône, et dont les faces seront aussi petites qn'on le voudra; le développement du cône est, par définition, la limite du développement de cette pyramide quand les faces tendent vers zéro. Nous supposons que le plan sécant ABCD... est normal à la face SAB, sans être perpendiculaire à l'arête SA; et nous allons effectuer le développement sur le plan de la face SAB. L'angle $\widehat{SAX}$ sera aigu, par exemple; et l'angle $\widehat{SAY}$ obtus. D'ailleurs, d'après un théorème de Géométrie élémentaire, l'angle $\widehat{SAC}$ sera plus grand que l'angle $\widehat{SAX}$; donc, dans le développement, le point C viendra quelque part en C_1, S et C_1 étant de part et d'autre de XY.

L'angle $\widehat{SAY}$ étant obtus, il en est de même de l'angle $\widehat{SBY}$, qui en diffère infiniment peu. L'angle $\widehat{SBD}$ est



plus petit que l'angle $\widehat{SBY}$; donc, dans le développement, le point D viendra quelque part en D_1 ; S et D_1 étant du même côté de XY.

On voit donc que AB, qui, à la limite, coïncide avec la courbe transformée, traverse cette courbe. Le point A est donc un point d'inflexion. La démonstration est d'ailleurs en défaut, si la génératrice SA est perpendiculaire au plan sécant.

Autre démonstration. — Considérons un cône et, par trois génératrices quelconques de ce cône, faisons passer un cône de révolution. Si les trois génératrices se rapprochent indéfiniment, le cône donné et le cône de révolution seront osculateurs le long de la génératrice de contact; les sections dans ces cônes par un même plan seront également osculatrices au point qui correspond à la génératrice de contact, et il en sera de même pour les développements de ces sections.

On est donc ramené à la détermination des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône de révolution. Si l'on désigne par ρ et ω les coordonnées polaires d'un point de la projection horizontale d'une courbe tracée sur le cône de révolution, et par ρ_1 et ω_1 les coordonnées polaires du point qui lui correspond dans le développement, on a les formules

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin\theta}, \qquad \rho = \rho_1 \sin\theta,$$

θ désignant l'angle au sommet du cône.

D'ailleurs, la section plane du cône se projette sur le plan horizontal mené par le sommet suivant une conique qui admet pour foyer le sommet et pour directrice la trace du plan sécant sur le plan horizontal. L'équation de cette conique est

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega},$$

et la transformée a pour équation

$$\rho_1 \sin\theta = \frac{p}{1 - e\cos\left(\dfrac{\omega_1}{\sin\theta}\right)};$$

l'excentricité e est égale à $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\theta$, θ désignant l'angle au sommet du cône et φ l'inclinaison du plan sécant sur le plan horizontal. Les points d'inflexion de cette courbe, caractérisés par la relation

$$\left(\frac{1}{\rho_1}\right)'' + \frac{1}{\rho_1} = 0,$$

sont donnés par l'équation

$$\cos\omega = -\frac{\tang^2\theta}{e} = -\frac{\tang\theta}{\tang\varphi}.$$

D'autre part, on trouve aisément pour l'équation du plan tangent au point (ρ, ω, z),

$$x\cos\omega + y\sin\omega - z\tang\theta = 0,$$

et, pour qu'il soit perpendiculaire au plan

$$z - x\tang\varphi = 0,$$

mené par le sommet du cône parallèlement au plan sécant, il faut avoir

$$\cos\omega = -\frac{\tang\theta}{\tang\varphi},$$

ce qui est bien la relation précédente. Le théorème est donc démontré.