NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MICHEL PETROVITCH

Un problème sur les séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 58-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__58_1>

[Dzbα] UN PROBLÈME SUR LES SÉRIES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH,
Docteur ès Sciences mathématiques, à Belgrade (Serbie).

---

1. Proposons-nous, connaissant la somme $F(x)$ d'une série

$$F(x) = \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \ldots + \varphi(n)x^n + \ldots,$$

d'en déduire la somme de la série

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(1)x}{1} + \frac{\varphi(2)x^2}{1.2} + \frac{\varphi(3)x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\varphi(n)x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

à l'aide des intégrales définies.

Soit ρ une quantité positive telle que, pour $|u| < \rho$, on ait

$$\sum_1^\infty \varphi(n) u^n = F(u).$$

Soit, de plus, a une constante à partie réelle positive et c une constante positive.

Posons

$$u = \frac{x}{a + zi},$$

et envisageons l'intégrale définie

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{czi}\, dz,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$J = \sum_{1}^{\infty} \varphi(n) \int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{czi}\, dz.$$

On sait (d'après Cauchy) qu'en général si $\mu - 1$, c et la partie réelle de a sont des quantités positives, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ciz}\, dz}{(a+zi)^{\mu}} = \frac{2\pi}{\Gamma(\mu)} c^{\mu-1} e^{-ac},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ciz}\, dz}{a+zi} = 0;$$

donc

$$J = \frac{2\pi}{ce^{ac}} \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(n) c^n x^n}{1.2\ldots n} = \frac{2\pi}{ce^{ac}} \Phi(cx),$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \Phi(cx) = \frac{ce^{ac}}{2\pi} J,$$

ou encore

$$(2) \qquad \Phi(x) = \frac{e^a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{zi}\, dz.$$

D'ailleurs, quelle que soit la valeur de x, on peut toujours donner à a une valeur telle que sa partie réelle soit positive et que

$$\left| \frac{x}{a+zi} \right| < \rho$$

pour toutes les valeurs de z entre $-\infty$ et $+\infty$. Les formules (1) et (2) sont donc, grâce à l'indétermination de a, valables pour x quelconque.

Soit maintenant $F(u)$ une fonction holomorphe quelconque de u. Si elle ne s'annule pas pour $u = 0$, l'intégrale J est indéterminée, car on a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{czi} F(0)\, dz = \left[F(0) \frac{e^{czi}}{ci} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{F(0)}{c} \lim [2 \sin c\omega x]$$

pour $\omega = \infty$, ce qui est indéterminé. Pour que J ait un sens, il faut donc que $F(0) = 0$, et l'on aura

$$\varphi(n) = \frac{F^{(n)}(0)}{1.2\ldots n},$$

ce qui donne la formule intéressante

$$(3) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)x^n}{(1.2\ldots n)^2} = \frac{e^a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{zi}\, dz.$$

Permutons x et c dans la formule (1) et faisons ensuite $c = 1$; on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{zxi}\, dz = \frac{2\pi}{x e^{ax}} \Phi(x).$$

avec

$$w = \frac{1}{a+zi},$$

et cela pour toutes les valeurs *positives* de x pour lesquelles $\Phi(x)$ converge.

2. Soit maintenant $\psi(z)$ une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet (c'est-à-dire ne présentant qu'un nombre limité de maxima et de minima dans tout intervalle fini) ; on sait qu'alors on peut écrire

$$\psi(z) = f_1(z) - f_2(z),$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions constamment finies et ne croissant jamais. Nous supposerons, de plus, que, quand x tend vers $\pm\infty$, f_1 et f_2 tendent vers une même limite finie et déterminée, de sorte que $\lim \psi(z) = 0$. L'intégrale

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{zxi}\, dz$$

(où x est positif) aura alors, comme l'on sait, un sens et sera fonction de x. Les intégrales de cette forme jouent un rôle important dans la Physique mathématique, par exemple dans le problème de l'armille, dans l'intégration de l'équation des cordes vibrantes, de l'équation des télégraphistes, etc.

Supposons que, pour $|u|$ suffisamment petit et a convenablement choisi, ayant sa partie réelle positive, la fonction

$$\psi\left[\left(a-\frac{1}{u}\right)\sqrt{-1}\right]$$

soit développable en série de Taylor

$$\psi\left[\left(a-\frac{1}{u}\right)i\right]=\sum_{1}^{\infty}\theta(n,a)u^n \quad (^1);$$

alors, en posant

$$u=\frac{1}{a+zi},$$

on aura

$$J_1=\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left[\left(a-\frac{1}{u}\right)i\right]e^{zxi}\,dz=\sum_{1}^{\infty}\theta(n,a)\int_{-\infty}^{\infty}u^n e^{zxi}\,dz,$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(z)e^{zxi}\,dz=\frac{2\pi}{xe^{ax}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\theta(n,a)x^n}{1.2.3\ldots n},$$

et cela pour toutes les valeurs *positives* de x pour lesquelles la série converge. On a ainsi un développement taylorien de l'intégrale.

3. Remarquons que l'on peut encore résoudre le problème 1 à l'aide d'une proposition énoncée par M. Peano

---

(1) On doit avoir $\theta(0,a)=0$, d'après l'hypothèse $\lim\psi(z)=$ pour $z=\infty$.

dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* n° 1, 1894, et qui est la suivante :

Étant données les séries

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

supposées absolument convergentes, la série

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots$$

aura pour somme l'intégrale de o à π du produit des séries

$$u_0 + u_1 e^{zi} + u_2 e^{2zi} + u_3 e^{3zi} + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 e^{-zi} + v_2 e^{-2zi} + v_3 e^{-3zi} + \ldots,$$

plus le produit des mêmes séries lorsqu'on y échange x en $-x$, le tout divisé par 2π.

Il suffit, pour résoudre le problème qui nous occupe, de prendre

$$u_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \qquad v_n = \varphi(n) x^n,$$

ou encore

$$u_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}, \qquad v_n = \varphi(n).$$

De la même manière, on peut le résoudre à l'aide d'une proposition de Parseval, qui consiste en ceci (¹) :

Étant données deux séries

$$\varphi(z) = u_0 - u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$
$$\psi(z) = v_0 + v_1 z + v_2 z^2 - \ldots,$$

supposées convergentes à l'intérieur d'un cercle de rayon un peu plus grand que un, ayant son centre à l'origine, on aura

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{\theta i}) \psi(e^{-\theta i})\, d\theta.$$

(¹) H. LAURENT, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 410.

J'ajoute, en terminant, que l'on obtient immédiatement, à l'aide de ces diverses formules, diverses expressions des transcendantes J de Bessel. Ainsi, par exemple, en posant

$$F(u) = e^u - 1,$$

la formule (3) donnera

$$\frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \ldots = \frac{e^a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\frac{x}{a+zi}} - 1 \right) e^{zi}\, dz,$$

expression qu'on peut transformer de différentes façons.