

D. GRAVÉ

**Sur le problème des trois corps**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1896), p. 537-547

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1896\\_3\\_15\\_\\_537\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__537_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[U3]

## SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. D. GRAVÉ, à Saint-Petersbourg.

Le problème qui consiste à déterminer le mouvement de trois corps s'attirant mutuellement en raison directe de leurs masses et d'une certaine fonction de leurs distances réciproques, se ramène, comme l'on sait, à la résolution du problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement, et attirés vers un centre fixe, avec des forces proportionnelles à certaines fonctions : 1° de leurs masses ; 2° de la distance entre ces deux corps ; 3° des distances des deux corps au centre fixe.

Nous parvenons ainsi à la considération d'un système de douze équations du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}, & \frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial z}, \\ \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta_1}, & \frac{dz_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta_1}, \\ \frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_1}, & \frac{d\eta_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_1}, & \frac{d\zeta_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial z_1}, \end{aligned}$$

où

$$H = U - \frac{1}{2m} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \frac{1}{2m_1} (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) .$$

U étant la fonction des forces ;  $m, m_1$  les masses de deux points ;  $x, y, z, x_1, y_1, z_1$  les coordonnées des points ;  $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$  proportionnelles aux projections des vitesses des points sur les axes des coordonnées.

M. Bertrand <sup>(1)</sup> introduit des variables nouvelles :

$$\begin{aligned} u &= x^2 + y^2 + z^2, & u_1 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \\ q &= x x_1 + y y_1 + z z_1, \\ v &= \xi^2 + \tau^2 + \zeta^2, & v_1 &= \xi_1^2 + \tau_1^2 + \zeta_1^2, \\ w &= x \xi + y \tau + z \zeta, & w_1 &= x_1 \xi_1 + y_1 \tau_1 + z_1 \zeta_1, \\ r &= x_1 \xi + y_1 \tau + z_1 \zeta, & r_1 &= x \xi_1 + y \tau_1 + z \zeta_1, \\ s &= \xi \xi_1 + \tau \tau_1 + \zeta \zeta_1. \end{aligned}$$

Une de ces dix variables est une fonction des autres, car l'équation

$$D = \begin{vmatrix} u & q & w & r_1 \\ q & u_1 & r & w_1 \\ w & r & v & s \\ r_1 & w_1 & s & v_1 \end{vmatrix} = 0$$

est satisfaite identiquement.

Les variables de M. Bertrand satisfont aux équations différentielles suivantes <sup>(2)</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{2w}{m}, & \frac{du_1}{dt} &= \frac{2w_1}{m_1}, & \frac{dq}{dt} &= \frac{r}{m} + \frac{r_1}{m_1}, \\ \frac{dv}{dt} &= 2\alpha w + 2\beta r, & \frac{dv_1}{dt} &= 2\alpha_1 w_1 + 2\beta r_1, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{v}{m} + \alpha u + \beta q, & \frac{dw_1}{dt} &= \frac{v_1}{m_1} + \alpha_1 u_1 + \beta q, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{s}{m_1} + \alpha q + \beta u_1, & \frac{dr_1}{dt} &= \frac{s}{m} + \alpha_1 q + \beta u, \\ \frac{ds}{dt} &= \alpha_1 r + \alpha r + \beta (w + w_1), \end{aligned}$$

ou  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta$  sont des coefficients qui dépendent des forces et s'expriment par  $u$ ,  $u_1$ ,  $q$ .

<sup>(1)</sup> BERTRAND, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVII, p. 32).

<sup>(2)</sup> BOUR, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI<sup>e</sup> Cahier, t. XXI, p. 35.

Nous nous proposons ici de résoudre la question suivante : trouver toutes les intégrales des équations de M. Bertrand indépendantes de la loi des forces.

Soit l'intégrale cherchée

$$V(u, u_1, v, v_1, w, w_1, r, r_1, q, s).$$

La dérivée de cette fonction, prise par rapport au temps, doit s'annuler à cause des conditions du problème, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u} \frac{2}{m} w - \frac{\partial V}{\partial u_1} \frac{2}{m_1} w_1 - \frac{\partial V}{\partial v} (2\alpha w - 2\beta r) \\ - \frac{\partial V}{\partial v_1} (2\alpha_1 w_1 + 2\beta_1 r_1) - \frac{\partial V}{\partial q} \left( \frac{r}{m} + \frac{r_1}{m} \right) \\ - \frac{\partial V}{\partial w} \left( \frac{v}{m} + \alpha u + \beta q \right) + \frac{\partial V}{\partial w_1} \left( \frac{v_1}{m_1} + \alpha_1 u_1 + \beta_1 q \right) \\ + \frac{\partial V}{\partial r} \left( \frac{s}{m_1} + \alpha q + \beta u_1 \right) + \frac{\partial V}{\partial r_1} \left( \frac{s}{m} - \alpha_1 q + \beta_1 u \right) \\ + \frac{\partial V}{\partial s} [\alpha_1 r + \alpha r_1 + \beta (w + w_1)] = 0. \end{aligned}$$

Pour trouver toutes les intégrales, qui soient indépendantes de la loi d'attraction, il faut évaluer à zéro séparément les coefficients des  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta$ , ainsi que le terme indépendant des forces.

En posant

$$\begin{aligned} a = 2w \frac{\partial V}{\partial u} - v \frac{\partial V}{\partial w} + s \frac{\partial V}{\partial r_1} - r \frac{\partial V}{\partial q}, \\ b = 2w_1 \frac{\partial V}{\partial u_1} + v_1 \frac{\partial V}{\partial w_1} + s \frac{\partial V}{\partial r} + r_1 \frac{\partial V}{\partial q}, \end{aligned}$$

nous obtenons le système de quatre équations

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{m} a + \frac{1}{m_1} b = 0, \\ (2) \quad & 2w \frac{\partial V}{\partial v} + u \frac{\partial V}{\partial w} + q \frac{\partial V}{\partial r} + r_1 \frac{\partial V}{\partial s} = 0, \\ (3) \quad & 2w_1 \frac{\partial V}{\partial v_1} + u_1 \frac{\partial V}{\partial w_1} - q \frac{\partial V}{\partial r} + r \frac{\partial V}{\partial s} = 0, \end{aligned}$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2r \frac{\partial V}{\partial v} + 2r_1 \frac{\partial V}{\partial v_1} + g \left( \frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\partial V}{\partial w_1} \right) \\ + u_1 \frac{\partial V}{\partial r} + u \frac{\partial V}{\partial r_1} + (w + w_1) \frac{\partial V}{\partial s} = 0. \end{array} \right.$$

En combinant ces équations deux à deux, au moyen du symbole de Poisson, nous parvenons au système complet suivant :

$$(5) \quad a = 0, \quad b = 0, \quad (2) = 0, \quad (3) = 0, \quad (4) = 0, \\ 2u \frac{\partial V}{\partial u} - 2v \frac{\partial V}{\partial v} + r_1 \frac{\partial V}{\partial r_1} - r \frac{\partial V}{\partial r} + g \frac{\partial V}{\partial q} - s \frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

$$(6) \quad 2u_1 \frac{\partial V}{\partial u_1} - 2v_1 \frac{\partial V}{\partial v_1} + r \frac{\partial V}{\partial r} - r_1 \frac{\partial V}{\partial r_1} + g \frac{\partial V}{\partial q} - s \frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \left( \frac{\partial V}{\partial w} - \frac{\partial V}{\partial w_1} \right) + (w_1 - w) \frac{\partial V}{\partial r_1} \\ + 2g \frac{\partial V}{\partial u} + u_1 \frac{\partial V}{\partial q} - 2s \frac{\partial V}{\partial v_1} - v \frac{\partial V}{\partial s} = 0, \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 \left( \frac{\partial V}{\partial w_1} - \frac{\partial V}{\partial w} \right) + (w - w_1) \frac{\partial V}{\partial r} \\ + 2g \frac{\partial V}{\partial u_1} + u \frac{\partial V}{\partial q} - 2s \frac{\partial V}{\partial v} - v_1 \frac{\partial V}{\partial s} = 0, \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2r \frac{\partial V}{\partial u_1} + 2r_1 \frac{\partial V}{\partial u} + s \left( \frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\partial V}{\partial w_1} \right) \\ + v \frac{\partial V}{\partial r} + v_1 \frac{\partial V}{\partial r_1} + (w + w_1) \frac{\partial V}{\partial q} = 0. \end{array} \right.$$

Voici la Table des valeurs du symbole de Poisson :

	<i>a.</i>	<i>b.</i>	(2).	(3).	(4).
<i>a</i> .....	0	0	(5)	0	(7)
<i>b</i> .....	0	0	0	(6)	(8)
(2).....	-(5)	0	0	0	0
(3).....	0	-(6)	0	0	0
(4).....	-(7)	-(8)	0	0	0
(5).....	2 <i>a</i>	0	-2(2)	0	-(4)
(6).....	0	2 <i>b</i>	0	-2(3)	-(4)
(7).....	0	(9)	-(4)	0	-2(3)
(8).....	(9)	0	0	-(4)	-2(2)
(9).....	0	0	(8)	(7)	(5)+(6)

	(5).	(6).	(7).	(8).	(9).
$a$ .....	$-2a$	$o$	$o$	$-(9)$	$o$
$b$ .....	$o$	$-2b$	$-(9)$	$o$	$o$
(2).....	$2(2)$	$o$	(4)	$o$	$-(8)$
(3).....	$o$	$2(3)$	$o$	(4)	$-(7)$
(4).....	(4)	(4)	$2(3)$	$2(2)$	$-(5)-(6)$
(5).....	$o$	$o$	(7)	$-(8)$	(9)
(6).....	$o$	$o$	$-(7)$	(8)	(9)
(7).....	$-(7)$	(7)	$o$	$(5)-(6)$	$2a$
(8).....	(8)	$-(8)$	$(6)-(5)$	$o$	$2b$
(9).....	$-(9)$	$-(9)$	$-2a$	$-2b$	$o$

Montrons que le système ci-dessus admet une intégrale complète au moyen de la méthode de Bool-Korkine. En intégrant l'équation  $a = 0$ , nous parvenons au système

$$\frac{du}{2w} = \frac{dw}{v} = \frac{dr_1}{s} = \frac{dq}{r}.$$

Les trois intégrales indépendantes sont

$$uv - w^2 = \alpha_1, \quad ws - vr_1 = \alpha_2, \quad rr_1 - qs = \alpha_3.$$

Introduisons les nouvelles variables  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  au lieu des anciennes  $u, w, r_1, q$ ,

$$V = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, u_1, v_1, w_1, v, r, s).$$

Les autres équations se transforment en un système nouveau

$$(1_1) \quad 2w_1 \frac{\partial W}{\partial u_1} + v_1 \frac{\partial W}{\partial w_1} + s \frac{\partial W}{\partial r} = 0,$$

$$(2_1) \quad 2v \frac{\partial W}{\partial v} + r \frac{\partial W}{\partial r} + s \frac{\partial W}{\partial s} + \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$(3_1) \quad \alpha_1 s \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial s} - \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \frac{\partial W}{\partial r} = 0,$$

$$(4_1) \quad 2w_1 \frac{\partial W}{\partial v_1} + u_1 \frac{\partial W}{\partial w_1} + r \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = 0,$$

( 542 )

$$(5_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2s \frac{\partial W}{\partial v_1} + r \frac{\partial W}{\partial w_1} + 2 \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \\ + (\omega_1 v - rs) \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + v \frac{\partial W}{\partial s} \\ + \left( u_1 s - \omega_1 r + \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \right) \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = 0, \end{array} \right.$$

$$(6_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2rv \frac{\partial W}{\partial v} - 2\alpha_2 \frac{\partial W}{\partial v_1} - \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \frac{\partial W}{\partial w_1} + u_1 v \frac{\partial W}{\partial r} \\ + \omega_1 v \frac{\partial W}{\partial s} + 2\alpha_1 r \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + [r\alpha_2 - v(\alpha_1 + \alpha_3)] \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \\ + \left( r\alpha_1 - u_1\alpha_2 + \omega_1 \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \right) \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = 0, \end{array} \right.$$

$$(7_1) \quad 2u_1 \frac{\partial W}{\partial u_1} - 2v_1 \frac{\partial W}{\partial v_1} + r \frac{\partial W}{\partial r} - s \frac{\partial W}{\partial s} - \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$(8_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} s \frac{\partial W}{\partial v} + v \frac{\partial W}{\partial r} + 2r \frac{\partial W}{\partial u_1} - 2\alpha_2 \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \\ + (s^2 - v v_1) \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + (v_1 r - \omega_1 s - \alpha_2) \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = 0, \end{array} \right.$$

$$(9_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial w_1} + v\omega_1 \frac{\partial W}{\partial r} + 2 \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \frac{\partial W}{\partial u_1} + 2sv \frac{\partial W}{\partial v} \\ + v v_1 \frac{\partial W}{\partial s} + 2s\alpha_1 \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \alpha_1 s \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \\ + \left( \alpha_1 s - \omega_1 \alpha_2 + v_1 \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \right) \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = 0. \end{array} \right.$$

En intégrant l'équation (1<sub>1</sub>), nous parvenons au système

$$\frac{du_1}{2w_1} = \frac{d\omega_1}{v_1} = \frac{dr}{s}.$$

Les deux intégrales indépendantes sont

$$u_1 v_1 - \omega_1^2 = \beta_1, \quad \omega_1 s - v_1 r = \beta_2.$$

Introduisons, au lieu des variables  $u, \omega, r$ , les nouvelles  $\beta_1, \beta_2,$

$$W = \Omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, v, v_1, s).$$

Le système transformé aura la forme

$$(1_1) \quad 2\nu \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} + \alpha_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \beta_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} + s \frac{\partial \Omega}{\partial s} = 0,$$

$$(2_2) \quad s \alpha_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} - \alpha_2 \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{\alpha_3 \nu v_1 - \alpha_2 \beta_2}{s} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} = 0,$$

$$(3_2) \quad s \beta_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} - \beta_2 \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{\alpha_3 \nu v_1 - \alpha_2 \beta_2}{s} \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$(4_2) \quad 2\nu v_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \nu_1} + \alpha_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \beta_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} + s \frac{\partial \Omega}{\partial s} = 0,$$

$$(5_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\nu s \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} + \alpha_1 s \left( 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} \right) \\ + \frac{\alpha_3 \nu v_1 - \alpha_2 \beta_2}{s} \left( 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} \right) \\ + \nu v_1 \frac{\partial \Omega}{\partial s} + s \alpha_2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} \right) = 0, \end{array} \right.$$

$$(6_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\beta_2 \nu \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} + 2\alpha_2 \nu_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \nu_1} \\ + \alpha_1 \beta_2 \left( 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} \right) + \alpha_2 \beta_1 \left( 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} \right) \\ + [ \alpha_2 \beta_2 + \nu v_1 (\alpha_1 + \alpha_3) ] \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} \\ + [ \alpha_2 \beta_2 + \nu v_1 (\beta_1 + \alpha_3) ] \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} = 0, \end{array} \right.$$

$$(7_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 \left( 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} \right) + \frac{\alpha_3 \nu v_1 - \alpha_2 \beta_2}{s^2} \left( 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} \right) \\ + \beta_2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} \right) + 2\nu v_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \nu_1} + \frac{\nu v_1}{s} \frac{\partial \Omega}{\partial s} = 0, \end{array} \right.$$

$$(8_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_2 \left( 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} \right) \\ + \alpha_2 \left( 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} \right) + (\nu v_1 - s^2) \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Soustrayant de l'équation (1<sub>2</sub>) l'équation (4<sub>2</sub>), nous obtenons l'équation

$$\nu \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} - \frac{\partial \Omega}{\partial \nu_1} = 0$$

qui donne l'intégrale  $\nu \nu_1 = l$ .

Introduisons, au lieu de  $\nu_1$ , la lettre  $l$ ; nous obtenons le système

$$\Omega = \Psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, l, s),$$

$$(1_3) \quad 2l \frac{\partial \Psi}{\partial l} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} + \beta_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2} + s \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0,$$

$$(2_3) \quad s^2 \alpha_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} - \alpha_2 s \frac{\partial \Psi}{\partial s} + (\alpha_3 l - \alpha_2 \beta_2) \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2} = 0,$$

$$(3_3) \quad s^2 \beta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2} - \beta_2 s \frac{\partial \Psi}{\partial s} + (\alpha_3 l - \alpha_2 \beta_2) \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} = 0$$

$$(4_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \left( 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_3} \right) + \beta_2 \left( 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_3} \right) \\ \quad \quad \quad + (l - s^2) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2} \right) = 0, \end{array} \right.$$

$$(5_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2l \frac{\partial \Psi}{\partial l} + \frac{l}{s} \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\alpha_3 l - \alpha_2 \beta_2}{s^2} \left( 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_3} \right) \\ \quad \quad \quad + \beta_1 \left( 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_3} \right) + \beta_2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2} \right) = 0, \end{array} \right.$$

$$(6_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2l \frac{\partial \Psi}{\partial l} + \frac{l}{s} \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \alpha_1 \left( 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_3} \right) \\ \quad \quad \quad + \frac{\alpha_3 l - \alpha_2 \beta_2}{s^2} \left( 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_3} \right) + \alpha_2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2} \right) = 0, \end{array} \right.$$

$$(7_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2l \frac{\partial \Psi}{\partial l} (\alpha_2 + \beta_2) + \alpha_1 \beta_2 \left( 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_3} \right) \\ \quad \quad \quad + \alpha_2 \beta_1 \left( 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_3} \right) + [\alpha_2 \beta_2 + l(\alpha_1 + \alpha_3)] \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} \\ \quad \quad \quad + [\alpha_2 \beta_2 + (\beta_1 + \alpha_3) l] \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2} = 0. \end{array} \right.$$

L'intégration de l'équation (1<sub>3</sub>) donne trois solutions indépendantes

$$\lambda = \frac{l}{s^2}, \quad \mu = \frac{\alpha_2}{s}, \quad \nu = \frac{\beta_2}{s}.$$

Au lieu des variables  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $l$ ,  $s$ , introduisons les nouvelles  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ;

$$\Psi = \Theta(\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \lambda, \mu, \nu).$$

Après la transformation, nous avons le système

$$(1_4) \quad 2\lambda\mu \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} + (\alpha_1 + \mu^2) \frac{\partial\theta}{\partial\mu} + \alpha_3\lambda \frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0,$$

$$(2_4) \quad 2\lambda\mu \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} + \alpha_3\lambda \frac{\partial\theta}{\partial\mu} + (\beta_1 + \nu) \frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0,$$

$$(4_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda) \left( 2\lambda \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} + \mu \frac{\partial\theta}{\partial\mu} \right) + (\mu - \lambda\nu) \frac{\partial\theta}{\partial\nu} \\ + \alpha_1 \left( 2 \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3} \right) + (\alpha_3\lambda - \mu\nu) \left( 2 \frac{\partial\theta}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3} \right) = 0, \end{array} \right.$$

$$(3_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \left( 2 \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3} \right) + \nu \left( 2 \frac{\partial\theta}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3} \right) \\ + (\lambda - 1) \left( \frac{\partial\theta}{\partial\mu} + \frac{\partial\theta}{\partial\nu} \right) = 0, \end{array} \right.$$

$$(5_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda) \left( 2\lambda \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} + \mu \frac{\partial\theta}{\partial\mu} \right) + (\mu - \lambda\nu) \frac{\partial\theta}{\partial\mu} \\ + (\alpha_3\lambda - \mu\nu) \left( 2 \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3} \right) + \beta_1 \left( 2 \frac{\partial\theta}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3} \right) = 0. \end{array} \right.$$

L'équation (1<sub>4</sub>) donne

$$\frac{d\lambda}{2\lambda\mu} = \frac{d\mu}{\alpha_1 + \mu^2} = \frac{d\nu}{\alpha_3\lambda}.$$

Les deux intégrales indépendantes sont

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\alpha_1 + \mu^2}, \quad \delta = \frac{\alpha_3\mu\lambda}{\alpha_1 + \mu^2} - \nu.$$

Au lieu des variables  $\lambda, \mu, \nu$ , introduisons les nouvelles  $\varepsilon, \delta$

$$\theta = U(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \varepsilon, \delta).$$

Après la transformation, on a

$$(1_5) \quad 2\varepsilon\delta \frac{\partial U}{\partial\varepsilon} + (\delta^2 - \varepsilon^2\alpha_1\alpha_3^2 + \beta_1) \frac{\partial U}{\partial\delta} = 0,$$

$$(2_5) \quad 2 \frac{\partial U}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial U}{\partial\alpha_3} + \alpha_3\varepsilon \left( 2 \frac{\partial U}{\partial\beta_1} + \frac{\partial U}{\partial\alpha_3} \right) - 2\varepsilon^2 \frac{\partial U}{\partial\varepsilon} - \varepsilon\delta \frac{\partial U}{\partial\delta} = 0,$$

$$(3_5) \quad -\delta \left( 2 \frac{\partial U}{\partial\beta_1} + \frac{\partial U}{\partial\alpha_3} \right) + [\varepsilon^2\alpha_1\alpha_3 - \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_3) + 1] \frac{\partial U}{\partial\varepsilon} = 0.$$

Intégrons la première équation (15)

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon\delta} = \frac{d\delta}{\delta^2 - \varepsilon^2 \alpha_1 \alpha_3^2 + \beta_1}.$$

L'intégrale sera

$$\Delta = \varepsilon \alpha_1 \alpha_3^2 + \frac{\delta^2 + \beta_1}{\varepsilon}.$$

Au lieu de  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , introduisons  $\Delta$ ,

$$U = H(\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \Delta).$$

Après la transformation, nous aurons

$$(16) \quad \gamma \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_3} + 2(\beta_1 - \alpha_3) \frac{\partial H}{\partial \Delta} = 0.$$

$$(16) \quad \gamma \frac{\partial H}{\partial \beta_1} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_3} + 2(\alpha_1 + \alpha_3) \frac{\partial H}{\partial \Delta} = 0.$$

Intégrons l'équation (16),

$$\frac{d\alpha_1}{2} = \frac{d\alpha_3}{1} = \frac{d\Delta}{\gamma(\beta_1 + \alpha_3)}$$

On aura deux intégrales indépendantes

$$\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0, \quad \Delta - \alpha_3^2 - 2\beta_1 \alpha_3 = \rho$$

Au lieu des variables  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\Delta$ , prenons  $\theta$  et  $\rho$ ,

$$H = \Phi(\beta_1, \theta, \rho).$$

Faisons la transformation, et nous aurons définitivement

$$(17) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + (\theta - \beta_1) \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0,$$

Pour intégrer cette dernière équation, considérons le système

$$\frac{d\beta_1}{1} = \frac{d\theta}{-1} = \frac{d\rho}{\theta - \beta_1}.$$

Les deux intégrales indépendantes sont

$$C = \beta_1 + \theta, \quad D = C\beta_1 - \beta_1^2 - \rho.$$

Nous obtenons ainsi la solution complète cherchée du système en question

$$V = \Pi(C, D),$$

où  $\Pi$  est une fonction arbitraire.

Il ne reste plus qu'à exprimer les quantités  $C, D$  au moyen des variables de M. Bertrand.

La fonction  $C$  se détermine aisément

$$C = \beta_1 + \theta = \alpha_1 + \beta_1 - 2\alpha_3 = uv - w^2 + u_1v_1 - w_1^2 - 2(rr_1 - qs)$$

et représente, comme il n'est pas difficile de s'en convaincre, la somme des carrés des intégrales des surfaces.

Pour déterminer la fonction  $D$ , nous avons les relations

$$D = \theta\beta_1 - \rho, \quad \theta = \alpha_1 - 2\alpha_3, \quad \rho = \Delta - \alpha_3^2 - 2\beta_1\alpha_3,$$

$$\Delta = \alpha_1\alpha_3^2\varepsilon + \frac{\partial^2 + \beta_1}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\alpha_1 + \mu^2}, \quad = \frac{\alpha_3\mu\lambda}{\alpha_1 + \mu^2} - \nu.$$

$$\lambda = \frac{l}{s^2}, \quad \mu = \frac{\alpha_2}{s}, \quad \nu = \frac{\beta_2}{s}, \quad l = v\nu_1,$$

$$\beta_1 = u_1v_1 - w_1^2, \quad \beta_2 = w_1s - v_1r, \quad \alpha_1 = uv - w^2,$$

$$\alpha_2 = \alpha s - vr_1, \quad \alpha_3 = rr_1 - qs,$$

d'où il vient

$$D = \begin{vmatrix} u & q & w & r_1 \\ q & u & r & w_1 \\ w & r & v & s \\ r_1 & w_1 & s & v_1 \end{vmatrix}.$$

Ainsi, nous voyons que les équations de M. Bertrand n'admettent pas d'intégrales indépendantes de la loi des forces autres que celles qui sont déjà connues.