Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 388-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__388_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1384

(1882, p. 140).

D'un point pris sur une hyperbole équilatère, on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe. Démontrer que les côtés d'un triangle quelconque inscrit dans l'hyperbole déterminent sur ces droites des segments proportionnels. (MANNHEIM.)

SOLUTION

par M. H. BROCARD.

L'hyperbole étant rapportée à ses asymptotes, soient α, β, γ les angles des côtés (a), (b), (c) du triangle ABC avec l'asymptote OX; (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), (ξ, η) les coordonnées des points A, B, C, M avec

$$x'y' = x''y'' = x'''y''' = \xi\eta = K^2;$$

a, a', b, b', c, c' les intersections des côtés (a), (b), (c) avec les parallèles à OY et à OX menées par M.

On aura

$$bc = (\xi - x')(\operatorname{tang}\gamma - \operatorname{tang}\beta),$$

$$b'c' = (y' - \eta)(\cot\beta - \cot\gamma),$$

et par conséquent

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{\xi - x'}{y' - \eta} \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\gamma.$$

Remplaçant tang β et tang γ par leurs expressions en fonction des coordonnées, l'on a

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{(\xi - x')(y' - y''')(y' - y'')}{(y' - \eta)(x' - x''')(x' - x'')}$$

ou simplement

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{K^2\xi}{x'x''x'''} = \text{const.}$$

On en conclut

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{ac}{a'c'} = \frac{ab}{a'b'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Question 1407

(1882, p. 336).

Le nombre des groupes de cinq impairs consécutifs dont quatre sont des nombres premiers est-il illimité?

(LIONNET.)

SOLUTION

par M. H. BROCARD.

Un groupe de quatre impairs consécutifs premiers doit être nécessairement pris dans un groupe de cinq impairs consécutifs, en y supprimant le multiple de 5 qui s'y rencontre naturellement.

Les différences successives de ces quatre impairs consécutifs premiers se présentent donc dans l'ordre circulaire 2, 2, 2, 4 ou 2, 4, 2, 2 ou 2, 2, 4, 2 ou 4, 2, 2, 2; mais si l'on examine l'ordre de succession des nombres impairs susceptibles d'être premiers, on observe que ces nombres se terminent périodiquement par 01, 07, 11, 13, 17, ..., 97, 01, 03, 07, 09, 11, 13, 19, ..., 99, 03, 09, 11, ..., 93, 99, la période comprenant 81 termes.

Si l'on étudie ensuite l'ordre de succession des chiffres qui les terminent et les différences qui s'en déduisent, on reconnaît que, dans la période précitée, il n'y a que les groupes (01, 03, 07, 09), (61, 63, 67, 69), (91, 93, 97, 99), (21, 23, 27, 29), (51, 53, 57, 59), (81, 83, 87, 89) qui répondent à la question. Ce sont les seuls qui donnent trois différences égales à 2 et **une différence égale à 4.**

Ainsi, à l'exception du groupe (1, 3, 5, 7), les groupes cherchés doivent se trouver dans les séquences de nombres premiers terminés par 1, 3, 7, 9 et dans ce seul ordre.

Cette recherche n'offre aucune difficulté, en raison de la disposition typographique adoptée pour les Tables de nombres premiers. C'est ainsi que, dans l'intervalle de 10 à 10000, il y a dix groupes répondant à la question.

Comme autres exemples de nombres terminés par les groupes désignés ci-dessus, on peut citer encore, dans la Table du 5e million :

4032401,	03,	07,	09,
4529381.	83,	87,	89,
4693691,	93,	97,	99.
4852451,	53,	57,	59,
4956821,	23,	27,	29,
4972061,	63,	67,	69.

Ces exemples et d'autres que l'on pourrait aisément y ajouter autorisent à présumer que la suite des nombres premiers renferme une infinité de groupes de quatre nombres consécutifs dont la différence n'est pas supérieure à 4 et qui répondent à la question proposée.

Question 1498

(1884, p. 400)

On donne deux droites fixes passant au point C *et une droite* AB *de longueur constante glisse sur ces deux droites. Démontrer que le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* ACB *est une ellipse; le cercle des neuf points a pour enveloppe une courbe parallèle à l'ellipse.*

Trouver le théorème réciproque. (WEILL.)

SOLUTION

par M. H. BROCARD.

Prenons pour axe des x le côté CA, et pour axe des y la perpendiculaire Cy à CA.

Le lieu du centre O du cercle circonscrit est une circonférence ayant C pour centre et $\frac{c}{2\sin C}$ pour rayon, car

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = 2R = 2.CO,$$

et l'on a, par hypothèse,

$$c = \text{const.} \quad \text{et} \quad C = \widehat{BCA} = \text{const.}$$

Le lieu de l'orthocentre H est aussi une circonférence concentrique à la première, car ce point H étant le transformé isogonal (ou par droites symétriques) du point O, les angles OCB, OBC, ABH, ACH sont égaux. Soit δ leur valeur commune; on a

$$CH \cos\delta = CB \cos C = 2 CO \cos\delta \cos C;$$

donc

$$CH = 2 CO \cos C = \text{const.}$$

Il reste à déterminer le lieu du point E milieu de OH et, par définition, centre du cercle d'Euler ou des neuf points. Or, en prenant pour axes de coordonnées les bissectrices de l'angle C, on a immédiatement

$$2x_E = R\cos\left(\delta + \frac{C}{2}\right) + 2R\cos C\cos\left(\delta + \frac{C}{2}\right),$$

$$2y_E = R\sin\left(\delta + \frac{C}{2}\right) - 2R\cos C\sin\left(\delta + \frac{C}{2}\right).$$

Ajoutant les carrés, on élimine $\left(\delta + \frac{C}{2}\right)$ et il reste

$$\frac{4x^2}{(1+2\cos C)^2} + \frac{4y^2}{(1-2\cos C)^2} = R^2,$$

équation d'une ellipse ayant pour *axes* $R(1+2\cos C)$ et $R(1-2\cos C)$.

Le cercle des neuf points ayant un rayon constant $\frac{R}{2}$, et son centre décrivant une ellipse, on en conclut que son enveloppe est une courbe parallèle à l'ellipse, ou *toroïde,* étudiée plusieurs fois déjà dans ce journal. *Voir,* par exemple : 1844, 442-455 (Breton de Champ) et 553-555 (Catalan); 1863, quest. 666 (W. Roberts); 1864, 80-81 (W. Roberts); 1871, 466-468 (Tortolini); 1891, quest. 1398, 6*-7* (Fauquembergue), etc.

Il nous reste à énoncer la proposition réciproque : Toute ellipse peut être considérée comme le lieu du centre du cercle des neuf points d'une série de triangles ayant un angle constant et le côté opposé donné. Il suffit, pour cela, de prendre
$a = \frac{c(1+2\cos C)}{2\sin C}$, $b = \frac{c(1-2\cos C)}{2\sin C}$.

On voit que l'ellipse se réduit à un segment de droite, si l'angle C est de 60° ou de 120°.