Concours général de 1896

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 381-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__381_0>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1896.

Mathématiques élémentaires.

Soit OAB un triangle rectangle en O; soient AA′, BB′ les bissectrices intérieures des angles aigus A et B; on demande de calculer les côtés $OA = x$, $OB = y$, $AB = z$ de ce triangle, connaissant les longueurs $OA' = a$, $OB' = b$, et de démontrer le résultat suivant :

En supposant entiers les nombres a, b, pour que les nombres x, y, z soient aussi entiers, il faut et il suffit que l'un des nombres a, b soit de la forme

$$2p^2(q-p)(2p-q)^m,$$

l'autre étant de la forme

$$q^2(q-p)(2p-q)^m,$$

p, q, m sont des nombres entiers positifs, vérifiant la condition

$$2p > q > p.$$

Mathématiques spéciales.

On donne une ellipse E qui, rapportée à ses axes, a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

1° On considère des ellipses S dont les axes coïncident en position avec ceux de l'ellipse E et ont 2A, 2B pour longueur. Trouver la relation qui doit lier A, B pour que l'on puisse inscrire dans E une infinité de triangles PQR circonscrits à S et, dans ces conditions, trouver le lieu des sommets des rectangles formés par les tangentes aux ellipses S en leurs sommets.

Montrer que, dans ces mêmes conditions, les normales à E aux points P, Q, R concourent en un point N.

2° Examiner si les ellipses S, obtenues au n° 1°, représentent toutes les ellipses concentriques à E, et telles qu'on puisse inscrire dans E une infinité de triangles PQR, circonscrits à S, les normales à F aux points P, Q, R étant concourantes.

3° Montrer que, parmi les ellipses S, il y en a pour lesquelles les normales PN, QN, RN aux points P, Q, R de l'ellipse E passent respectivement par les pôles P′, Q′, R′ par rapport à E des côtés QR, RP, PQ des triangles PQR.

4° S satisfaisant aux conditions énoncées au n° 3°, trouver le lieu des centres des cercles conjugués aux triangles P′, Q′, R′, l'enveloppe de ces cercles et le lieu des points de rencontre N des normales PN, QN, RN à l'ellipse E.