Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 377-380

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__377_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Astor,
professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Les quelques mots qui indiquent le sens de la solution de la question de Mécanique, énoncée à la fin de la page 33, supposent, ou que le cylindre est homogène, ou tout au moins que $A = B$.

Les équations du mouvement autour du centre de gravité sont, en prenant pour axe fixe Cr, la verticale du centre de gravité :

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h, \\ Apy + Bqy' + Cry'' &= k, \end{aligned}$$

h et k étant deux constantes dont la première est > 0.

Or ici $\theta = 90^\circ$, et l'on a par suite :

$$p = \sin\varphi \frac{d\psi}{dt}, \qquad q = \cos\varphi \frac{d\psi}{dt}, \qquad r = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$y = \sin\varphi, \qquad y' = \cos\varphi, \qquad y'' = 0.$$

Les intégrales premières sont donc :

$$(A \sin^2\varphi + B \cos^2\varphi) \frac{d\psi^2}{dt^2} + C \frac{d\varphi^2}{dt^2} = h,$$

$$(A \sin^2\varphi + B \cos^2\varphi) \frac{d\psi}{dt} = k.$$

φ est donné par la quadrature

$$\sqrt{C} \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{(hA - k^2)\sin^2\varphi + (hB - k^2)\cos^2\varphi}{A \sin^2\varphi + B\cos^2\varphi}},$$

et par suite ψ par la quadrature

$$d\psi = \frac{k\sqrt{C}\,d\varphi}{\sqrt{(A \sin^2\varphi + B \cos^2\varphi)[(hA - k^2)\sin^2\varphi + (hB - k^2)\cos^2\varphi]}}$$

Ces quadratures sont en général elliptiques; on peut les obtenir par les fonctions élémentaires si $h = k^2 B$, en supposant $A > B$. ψ détermine l'orientation de l'axe. Si $A = B$, $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ sont constants.

Extraits d'une Lettre de M. Servais,
professeur à l'Université de Gand.

1° Dans un article *Sur les cordes normales de la parabole* (*N. A. M.*, p. 274), M. d'Ocagne établit les deux théorèmes suivants : $M_1 M_2$ *étant la corde normale au point* M_1 *d'une parabole :* 1° *L'angle des tangentes en* M_1 *et* M_2 *à la parabole est égal à l'inclinaison sur l'axe de la droite qui joint le point* M_1 *au sommet;*

2° *Le rapport du rayon de courbure en* M_1, *à la corde normale correspondant à ce point, est égal au rapport de l'abscisse du point* M_1 *au paramètre.*

On obtient la première propriété en remarquant que les pieds des normales issues du point M_2 sont sur un cercle passant par le sommet O de la parabole et par le milieu R de la projection de OM_2 sur la tangente au sommet. Car le point R étant sur la tangente au point M_2, si N est le point commun à l'axe de la parabole et à la normale au point M_2, le cercle considéré a pour diamètre RN. De là résulte l'égalité des angles M_1ON et M_1M_2N.

L'égalité

$$\frac{R}{l} = \frac{x_1}{p},$$

établissant le second théorème, ne diffère pas de la suivante :

$$\frac{2R}{l} = \tang^2\alpha:$$

α étant l'angle que la normale au point M_1 fait avec l'axe (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XVII, p. 380); car

$$\tang^2\alpha = \frac{2x_1}{p}.$$

2° Généralisation de la question 1641.

Une conique Σ_1 a pour centre un point G d'une conique Σ, et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre O de Σ. Si des parallèles aux asymptotes de Σ et Σ_1 forment un faisceau harmonique, Σ_1 coupe Σ en trois autres points A, B, C, formant un triangle, dont G est le centre de gravité.

Le lieu des centres des coniques, circonscrites au quadrangle ABCG, est une conique Σ_2 passant par le centre O de Σ, par les milieux de GA, GB, GC et dont les points à l'infini sont conjugués par rapport à Σ. Σ_2 est donc homothétique à Σ_1, le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$. Les côtés opposés GA et BC du quadrangle ABCG déterminent sur la droite de l'infini deux points conjugués par rapport à Σ_2; par suite, BC est une corde conjuguée du diamètre GA. Le point G est donc le centre de gravité du triangle ABC.

Remarque. — Si Σ_1 est un cercle, Σ est nécessairement une hyperbole équilatère; on retrouve alors le théorème énoncé.

Remarque sur la question 1653.

(*Extrait d'une Lettre de M. M. d'Ocagne*).

J'ai démontré dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1891; p. 99) que *si le cercle osculateur* C *en un point d'une parabole coupe cette courbe au point* V *et si la droite* MV *rencontre l'axe de la parabole au point* I, *on a* $IV = 3MI$, et d'autre part (même page) que *si le cercle* C *rencontre en* M' *le diamètre relatif au point* M, *on a*

$$\text{arc}\,MM' = \text{arc}\,M'V.$$

Prenons le point D symétrique du point M' par rapport à la normale en M. Ce point D se trouve sur le cercle C et la droite MD passe par le foyer F. En outre, on a

$$\text{arc}\,MD = \text{arc}\,MM' = \text{arc}\,M'V.$$

Donc VD est parallèle à MM', c'est-à-dire à FI, et l'on a

$$\frac{MF}{FD} = \frac{MI}{IV} = \frac{1}{3},$$

d'après le théorème ci-dessus. On est ainsi amené à l'énoncé de la question 1653 (1893, p. 2*).