NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 345-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__345_0>

[B2]

EXPOSÉ D'UNE THÉORIE NOUVELLE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES;

PAR M. H. LAURENT.

I. — PRÉLIMINAIRES.

J'appelle *substitution linéaire* l'opération qui a pour but de remplacer des variables par des fonctions linéaires et homogènes de nouvelles variables.

Une substitution linéaire pourra donc se représenter au moyen des formules

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \ldots + \alpha_{nn}x_n, \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignant des variables, α_{ij} des coefficients constants, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de nouvelles variables.

Le déterminant $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}$ est dit le *déterminant de la substitution;* le nombre n des variables x ou y est le *degré* de la substitution.

Considérons la fonction linéaire des τ_{ij}

$$(2)\qquad s = \Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij},$$

nous dirons que cette fonction s représente la substitution (1), et, en effet, à chaque substitution (1) correspond une et une seule fonction linéaire telle que (2), et *vice versa.* Les τ_{ij} seront des imaginaires ou des clés assujetties aux relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \tau_{ij} \times \tau_{kl} = 0 \quad \text{si} \quad j \gtrless k, \\ \tau_{ij} \times \tau_{jl} = \tau_{il}, \end{cases}$$

Il résulte de là que, si $s = \Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ et $t = \Sigma\beta_{ij}\tau_{ij}$ représentent deux substitutions, $s + t$ représentera une substitution que nous pouvons appeler la *somme* des deux premières, et $\Sigma(\alpha_{ij} + \beta_{ij})\tau_{ij}$ sera la substitution

$$\begin{gathered}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_p = (\alpha_{p1} + \beta_{p1})x_1 + \ldots + (\alpha_{pn} + \beta_{pn})x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

On appelle *produit de deux substitutions* s et t la substitution équivalente à la substitution s suivie de t ou *vice versa;* ce produit dépend d'ailleurs de l'ordre dans lequel on effectue les substitutions : st est le résultat obtenu en effectuant d'abord t, puis s.

Si l'on appelle s la substitution (1) ou $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$, et t la substitution

$$\begin{gathered}
z_1 = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 \ldots + \beta_{1n}y_n, \\
z_2 = \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 \ldots + \beta_{2n}y_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered}$$

on aura

$$\begin{aligned}
z_i = \ & x_1(\beta_{i1}\alpha_{11} + \beta_{i2}\alpha_{21} \ldots + \beta_{in}\alpha_{n1}) \\
& + x_2(\beta_{i1}\alpha_{12} + \beta_{i2}\alpha_{22} \ldots + \beta_{in}\alpha_{n2}) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x_j(\beta_{i1}\alpha_{1j} + \beta_{i2}\alpha_{ij} \ldots + \beta_{in}\alpha_{nj}) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}$$

cette substitution sera la substitution ts représentée par

$$(4) \qquad \Sigma(\beta_{i1}\alpha_{ij} + \beta_{i2}\alpha_{2j} \ldots + \beta_{in}\alpha_{nj})\tau_{ij};$$

or, si l'on effectue le produit

$$\Sigma\beta_{ij}\tau_{ij} \times \Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij},$$

en tenant compte des relations (3), on trouve précisément le résultat (4). Donc *le produit de deux substitutions est représenté par le produit des fonctions linéaires qui représentent ces substitutions.*

II. — Des fonctions de substitutions.

Si l'on donne plusieurs substitutions s, t, u, ..., les notations $s+t$, $s+t+u$, st, ts, stu, ... sont bien définies d'après ce qui précède, la notation $s-t$ se comprend d'elle-même.

La substitution

$$\tau_{11}+\tau_{22}+\ldots+\tau_{nn}$$

joue le rôle de l'unité, elle remplace x_1 par x_1, x_2 par x_2, ...; d'ailleurs

$$\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}(\tau_{11}+\tau_{22}\ldots+\tau_{nn})=\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij};$$

nous poserons donc

$$\tau_{11}+\tau_{22}\ldots+\tau_{nn}=1,$$

et 1 sera le symbole de la substitution de nul effet; de même, a étant un nombre, on pourra poser

$$a=a\tau_{11}+a\tau_{22}\ldots+a\tau_{nn},$$

car

$$(a\tau_{11}+a\tau_{22}\ldots)\times\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}=\Sigma a\alpha_{ij}\tau_{ij};$$

les symboles $a+bs+ct+\ldots$ sont donc maintenant bien définis et représentent des substitutions. Les formules

$$s^0=1,\qquad s^1=s,\qquad s^2=s\times s,\qquad s^3=s\times s\times s,\qquad \ldots$$

serviront à définir s^0, s^1, s^2, s^3, ..., et alors $f(x)$ désignant un polynome entier en x, $f(s)$ sera bien défini et représentera une substitution.

Il faut remarquer que τ_{ij} représente une substitution dite *élémentaire*, qui remplace x_i par x_j et les autres variables par zéro.

Les substitutions de la forme $a+b\tau_{ij}$ sont dites *primaires*.

III. — Décomposition d'une substitution en facteurs primaires.

Si l'on multiplie une substitution $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$, dont le déterminant est

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}\cdot$$

par la substitution primaire $1+p\tau_{ij}$, elle devient

$$\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}+p(\alpha_{1i}\tau_{1j}+\alpha_{2i}\tau_{2j}\ldots+\alpha_{ni}\tau_{nj});$$

cette multiplication a pour effet de remplacer, dans le Tableau (1), la colonne α_{1j}, α_{2j}, ..., α_{nj} par $\alpha_{1j}+p\alpha_{1i}$, $\alpha_{2j}+p\alpha_{2i}$, ..., $\alpha_{nj}+p\alpha_{ni}$. La multiplication est censée effectuée à droite par $(1+p\tau_{ij})$; si l'on multipliait à gauche, on obtiendrait un résultat analogue, dans lequel les lignes joueraient le rôle qu'avaient joué tout à l'heure les colonnes.

Il résulte de là que, en multipliant la substitution $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ successivement à droite par des facteurs primaires, on fera prendre la forme

$$\begin{matrix} p_{11}\alpha_{11}+p_{21}\alpha_{12}\ldots+p_{n1}\alpha_{1n}, & p_{12}\alpha_{11}+\ldots p_{n2}\alpha_{1n}, & \ldots, \\ p_{11}\alpha_{21}+p_{21}\alpha_{22}\ldots+p_{n1}\alpha_{2n}, & p_{12}\alpha_{21}+\ldots p_{n2}\alpha_{2n}, & \ldots, \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

à son déterminant, en sorte que, si l'on prend $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}=1$, on voit que la substitution $\Sigma p_{ij}\tau_{ij}$, dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

peut s'obtenir en multipliant entre elles des substitutions primaires de la forme $a + b\tau_{ij}$, et il est visible que la substitution $\Sigma p_{ij}\tau_{ij}$ est quelconque; donc *toute substitution est décomposable en facteurs primaires.*

IV. — Équation caractéristique.

Posons

$$\begin{gathered} z_1 = \gamma_1\tau_{11} + \gamma_2\tau_{12} \ldots + \gamma_n\tau_{1n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_i = \gamma_1\tau_{i1} + \gamma_2\tau_{i2} \ldots + \gamma_n\tau_{in}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ s = \Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}, \end{gathered}$$

on aura

$$sz_1 = (\alpha_{11}\tau_{11} + \alpha_{21}\tau_{21}\ldots)\gamma_1 + (\alpha_{11}\tau_{12} + \alpha_{21}\tau_{22}\ldots)\gamma_2 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$sz_1 = \alpha_{11}(\gamma_1 z_{11} + \gamma_2\tau_{12}\ldots) + \alpha_{21}(\gamma_1\tau_{21} + \gamma_2\tau_{22}\ldots)\ldots$$

ou

$$sz_1 = \alpha_{11}z_1 + \alpha_{21}z_2 + \ldots\alpha_{n1}z_n,$$

en sorte que l'on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} (\alpha_{11} - s)z_1 + \quad \alpha_{21} \quad z_2 + \ldots + \alpha_{n1}z_n = 0, \\ \quad \alpha_{12} \quad z_1 + (\alpha_{22} - s)z_2 + \ldots + \alpha_{n2}z_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

désignons par $f(s)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n} - s & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

on déduit des équations (1)

$$f(s)z_1 = 0, \qquad f(s)z_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f(s)z_n = 0.$$

Or $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ sont quelconques, en les remplaçant par $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}$, puis par $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2n}, \ldots$, en appelant z_{i1}, z_{i2}, ... ce que devient alors z_i, on a

$$f(s)z_{11} = 0, \qquad f(s)z_{22} = 0, \qquad \ldots,$$

et, par suite,

$$f(s)(z_{11} + z_{22} + \ldots + z_{nn}) = 0.$$

Or, $z_{11} + z_{22} + \ldots$ est une substitution quelconque égale à 1, si l'on veut; donc

$$f(s) = 0.$$

Donc toute substitution de degré n satisfait à une équation de même degré que l'on appelle son équation caractéristique.

Le terme constant de l'équation caractéristique n'est autre chose que le déterminant de la substitution. Une substitution peut satisfaire à une autre équation qu'à son équation caractéristique; si cette équation est de degré inférieur à n, on dit que la substitution est *singulière;* au contraire, une substitution est *normale* quand elle ne satisfait à aucune équation de degré inférieur à son degré.

Il est évident, d'après la définition du produit de deux substitutions, que le déterminant d'un produit de substitutions est égal au produit des déterminants de ces substitutions.

Si l'on considère une équation de la forme

$$st = 0,$$

où s et t sont deux substitutions, il n'en résulte pas nécessairement $s = 0$ ou $t = 0$, mais il faut que le déterminant de s ou de t soit nul.

Cela posé, supposons que $f(s) = 0$ soit l'équation caractéristique de s, supposons que s satisfasse à une autre équation $\varphi(s)$ de degré égal ou supérieur à n, degré de s. Soit $\theta(s)$ le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $\varphi(x)$, s satisfera à $\theta(s)=0$. Ainsi l'on aura

$$\theta(s)=0.$$

Donc, si la substitution s n'est pas normale, elle satisfait à une équation $\theta(s)=0$ où $\theta(s)$ est un diviseur de $f(s)$, $f(s)$ désignant le premier nombre de son équation caractéristique.

Dans le cas où la substitution s n'est pas normale, son équation caractéristique n'est pas irréductible.

Il est facile de voir en effet que $\theta(s)$ est à coefficients commensurables avec les α_{ij}. Soit

$$\theta(s)=s^p+A_1 s^{p-1}+\ldots+A_p.$$

On peut poser

$$s=\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij},\qquad \ldots,\qquad s^q=\Sigma\alpha_{ij}^{(q)}\tau_{ij},\qquad \ldots,$$

alors

$$\theta(s)=\Sigma\tau_{ij}\big(\alpha_{ij}^{(p)}+A_1\alpha_{ij}^{(p-1)}+\ldots\big);$$

mais comme $\theta(s)=0$, on aura

$$\alpha_{ij}^{(p)}+A_1\alpha_{ij}^{p-1}+\ldots=0;$$

ce qui montre que les A sont fonctions rationnelles des $\alpha_{ij}^{(q)}$ et, par suite, des α_{ij}. Donc $f(s)=0$ n'est pas irréductible si $\theta(s)$ existe, c'est-à-dire si s n'est pas normale.

V. — Fonctions rationnelles d'une substitution.

Étant donnée une substitution $s=\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$, il existe une autre substitution $s^{-1}=\Sigma\beta_{ij}\tau_{ij}$ telle que

$$s\times s^{-1}=s^{-1}\times s=1,$$

pourvu que le déterminant de s ne soit pas nul.

En effet

$$s.s^{-1} = \Sigma \tau_{ij}(\alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots),$$

et si l'on veut que $ss^{-1} = 1$, il faudra poser

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n1} = 1,\\
&\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{n1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et les valeurs de β sont bien déterminées si $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22},\ldots$ n'est pas nul ; on trouve d'ailleurs

$$s^{-1} = \frac{1}{D}\sum \frac{\partial D}{\partial \alpha_{ij}}\tau_{ij},$$

$$D = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn}.$$

Deux substitutions s, t sont dites *échangeables* quand $st = ts$; s^{-1} et s sont donc échangeables, deux fonctions entières de s sont échangeables.

Si s est échangeable avec t, s^α le sera aussi, s^{-1} et ses puissances $s^{-\alpha}$ aussi.

En effet, si

$$st = ts,$$

on a

$$sts = tss,$$

ou

$$s^2 t = ts^2,$$

$$\ldots\ldots$$

On a de même

$$sts^{-1} = tss^{-1} = t,$$

et en multipliant à gauche par s^{-1}

$$ts^{-1} = s^{-1}t.$$

Si s et t sont échangeables, on peut poser

$$ts^{-1} = s^{-1}t = \frac{t}{s}.$$

Le symbole $\frac{f(s)}{\varphi(s)}$, où f et φ sont des polynomes entiers, est alors bien défini, pourvu que le déterminant de $\varphi(s)$ ne soit pas nul.

Toute fonction entière d'une substitution de degré n est égale à une fonction de degré $n-1$ au plus.

En effet, toute fonction entière $F(s)$ de s donne lieu à une identité de la forme

$$F(s) = Q f(s) + R(s),$$

où $f(s)$ est le premier membre de l'équation caractéristique (ou de l'équation de degré moindre à laquelle s satisfait) et où $R(s)$ est de degré inférieur à $f(s)$ (est de degré $n-1$ au plus); et comme $f(s) = 0$, on a

$$F(s) = R(s) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte de là que si ν est le degré de l'équation de degré minimum à laquelle s satisfait ($\nu = n$, si s est normale) et si l'on a

$$A_0 s^{\nu-1} + A_1 s^{\nu-2} + \ldots = 0,$$

il faut que

$$A_0 = A_1 = \ldots = 0.$$

Toute fonction rationnelle $\frac{f(s)}{\varphi(s)}$ d'une substitution s de degré n peut se mettre sous une forme entière (de degré $n-1$ au plus, d'après ce que l'on vient de voir).

En effet, soit $f(s) = 0$ l'équation caractéristique de s. Il existe des polynomes $\theta(s)$ et $\varpi(s)$ tels que

$$\theta(s)\psi(s) + \varpi(s) f(s) = 1,$$

ou comme $f(s) = 0$, tels que

$$\theta(s) = \frac{1}{\psi(s)};$$

donc

$$\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = \theta(s)\varphi(s). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VI. — Substitutions de déterminant nul.

Aux substitutions de déterminant nul ne correspondent pas de changements de variables proprement dits, et il n'y aurait pas lieu de les étudier si elles n'étaient pas de précieux auxiliaires dans les calculs.

Cherchons d'abord dans quelles conditions le produit de deux substitutions s et t peut être nul.

Soit

$$s = \Sigma \alpha_{ij}\tau_{ij}, \qquad t = \Sigma \beta_{ij}\tau_{ij}.$$

En égalant le produit st à zéro, on a n^2 équations telles que

$$(1) \qquad \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nj} = 0,$$

et si l'on considère les α_{ij} comme des inconnues, plusieurs cas peuvent se présenter.

1° On peut satisfaire à l'équation $st = 0$ en prenant tous les α nuls, c'est-à-dire en supposant $s = 0$; et l'on ne pourra y satisfaire autrement si le déterminant $B = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots, \beta_{nn}$ n'est pas nul.

2° Supposons $B = 0$, sans autre condition entre les β_{ij}. Les équations (1) se partageront en n groupes dans lesquels les rapports de $n-1$ inconnues à la $n^{\text{ième}}$ seront déterminés; ces groupes seront

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

et comme pour chaque groupe les coefficients seront les mêmes, on aura

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \ldots = \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{n2}} \cdots,$$

tous les mineurs du second degré du déterminant A de s seront nuls.

3° Supposons que non seulement B soit nul, mais que ses mineurs soient nuls sans autre condition entre les β_{ij}. Les groupes d'équations contenus dans le type (1) se réduiront à des groupes de $n-2$ équations distinctes, deux des inconnues déterminent les autres, et, comme les n groupes ont les mêmes coefficients, les mineurs du troisième degré de A sont nuls.

En continuant cette discussion, on voit que, en général, si les mineurs d'ordre p de t sont nuls, les mineurs de degré $p+2$ de s devront être nuls.

Considérons maintenant un système de n^2 quantités

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

dont le déterminant $\Sigma \pm x_{11} x_{22} \ldots = X$ ne soit pas nul ; posons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \dfrac{1}{X} \sum \tau_{ij}\, x_{i1} \dfrac{\partial X}{\partial x_{j1}}, \\ \xi_2 = \dfrac{1}{X} \sum \tau_{ij}\, x_{i2} \dfrac{\partial X}{\partial x_{j2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_n = \dfrac{1}{X} \sum \tau_{ij}\, x_{in} \dfrac{\partial X}{\partial x_{jn}}. \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que l'on aura

$$\xi_p \xi_q = \frac{1}{X^2} \left(x_{1p} \frac{\partial X}{\partial x_{1q}} + x_{2p} \frac{\partial X}{\partial x_{2q}} + \ldots \right) \sum \tau_{ij} x_{ip} \frac{\partial X}{\partial x_{jq}};$$

donc

$$(2) \qquad \xi_p \xi_q = \begin{cases} 0 & \text{si } p \gtrless q, \\ 1 & \text{si } p = q. \end{cases}$$

On a ensuite en ajoutant (1)

$$(3) \qquad \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = 1.$$

Les substitutions ξ sont telles que, si a_1, a_2, ... désignent des nombres, l'égalité

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_n \xi_n = 0$$

entraîne $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, car en la multipliant par ξ_1, en vertu de (2) on a

$$a_1 \xi_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_1 = 0.$$

Cela posé, nous pouvons maintenant démontrer qu'il existe des substitutions normales et des substitutions singulières. D'abord si s_1, s_2, ..., s_n sont des nombres différents entre eux,

$$s = s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2 + \ldots + s_n \xi_n$$

sera une substitution normale; en effet, si l'on pose $(x - s_1)(x - s_2)\ldots(x - s_n) = f(x)$, on aura d'abord en vertu de (1)

$$\begin{gathered} s^2 = s_1^2 \xi_1 + \ldots + s_n^2 \xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s^p = s_1^p \xi_1 + \ldots + s_n^p \xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(s) = f(s_1)\xi_1 + f(s_2)\xi_2 + \ldots + f(s_n)\xi_n, \end{gathered}$$

donc $f(s) = 0$, et s a pour équation caractéristique $f(s) = 0$; si elle pouvait satisfaire à une autre équation de degré $p \leqq n$, $\varphi(s) = 0$, comme

$$\varphi(s) = \varphi(s_1)\xi_1 + \ldots + \varphi(s_n)\xi_n = 0.$$

il faudrait que $\varphi(s_1) = \varphi(s_2) = \ldots = 0$, ce qui est absurde.

Au contraire, si les quantités $s_1, s_2, \ldots$ ne sont pas toutes différentes, si, par exemple, $s_1 = s_2$, la substitution $s = \Sigma s_i \xi_i$ sera singulière, car elle satisfera à l'équation $(x - s_1)(x - s_2)\ldots(x - s_n) = 0$.

Nous pouvons donc former à volonté des substitutions normales ou singulières.

VII. — Pivots d'une substitution.

Considérons maintenant la substitution $\Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ ou

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n, \end{aligned}$$

si nous posons

$$y_1 = k x_1, \qquad y_2 = k x_2, \qquad \ldots, \qquad y_n = k x_n,$$

nous trouvons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} (\alpha_{11} - k) x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n &= 0, \end{aligned} \right.$$

de ces équations on tire d'abord

$$f(k) = 0;$$

et $f(k) = 0$ est l'équation caractéristique de s_1. Soient $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ses racines, en les mettant successivement à la place de k dans (1), on en déduit pour les rapports $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n valeurs.

Soient

$$x_{1i}, \quad x_{2i}, \quad \ldots, \quad x_{ni}$$

les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ correspondant à la valeur

s_i de k, on aura

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_{11} - s_i)x_{1i} + \ldots + \alpha_{1n}x_{ni} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{n1}x_{1i} + \ldots + (\alpha_{nn} - s_i)x_{ni} = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on pose $X = \Sigma \pm x_{11}x_{22}\ldots x_{nn}$, on déduira de (2)

$$\alpha_{pq} = \frac{1}{X}\left(s_1 x_{p1}\frac{\partial X}{\partial x_{q1}} + s_2 x_{p2}\frac{\partial X}{\partial x_{q2}} + \ldots\right),$$

et en posant

$$\xi_i = \frac{1}{X}\sum x_{qi}\frac{\partial X}{\partial x_{pi}}\tau_{pq},$$

on aura

$$s = s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + \ldots + s_n\xi_n.$$

Nous voyons le rôle important que jouent les x_{ij} dans la théorie des substitutions. $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}$ constitueront ce que nous appellerons un *pivot*.

Les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots$ peuvent s'exprimer facilement en fonction de s; en effet, comme

$$s^p = s_1^p\xi_1 + s_2^p\xi_2 + \ldots + s_n^p\xi_n,$$

on a, en appelant F un polynome entier,

$$F(s) = F(s_1)\xi_1 + F(s_2)\xi_2 + \ldots,$$

et si

$$F(s) = \frac{f(s)}{s - s_i},$$

on a

$$\frac{f(s)}{s - s_i} = f'(s_i)\xi_i,$$

$$\xi_i = \frac{f(s)}{f'(s_i)(s - s_i)},$$

ce qui justifie le nom de *substitutions interpolaires* que nous donnerons aux substitutions ξ.

La théorie que nous venons d'exposer est subordonnée à un grand nombre d'hypothèses restrictives et sur lesquelles nous allons maintenant porter notre attention.

En général, quand $f(k)=0$ aura des racines multiples, la substitution ne pourra plus se mettre sous la forme

$$s_1\xi_1+\ldots+s_n\xi_n.$$

Cependant quand tous les mineurs de $f(k)$ sont nuls $f(k)$ a une racine double et les pivots correspondant à cette racine sont indéterminés, et s peut encore, et cela d'une infinité de manières, prendre la forme précédente; mais alors, dans cette forme, il y aura des coefficients égaux.

Ce qu'il faut remarquer, c'est que c'est seulement dans des cas exceptionnels que notre théorie sera en défaut et X ne sera jamais nul puisque les α_{ij} sont bien déterminés.

VIII. — Substitutions échangeables.

Proposons-nous maintenant de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions

$$s=\Sigma\,\alpha_{ij}\tau_{ij} \quad \text{et} \quad t=\Sigma\,\beta_{ij}\tau_{ij}$$

soient échangeables. Supposons, ce qui est le cas général, que s et t puissent se mettre sous la forme

$$s=s_1\xi_1+s_2\xi_2+\ldots+s_n\xi_n,$$
$$t=t_1\eta_1+t_2\eta_2+\ldots+t_n\eta_n,$$

ξ_1, ξ_2, ..., η_1, η_2, ... désignant des interpolaires, on pourra poser

$$\xi_p=\frac{1}{X}\sum x_{jp}\frac{\partial X}{\partial x_{ip}}\tau_{ij},$$
$$\eta_q=\frac{1}{Y}\sum y_{jq}\frac{\partial X}{\partial y_{jp}}\tau_{ij},$$

en désignant par X et Y les déterminants

$$X=\Sigma\pm x_{11}\ldots x_{nn}, \qquad Y=\Sigma\pm y_{11}\,y_{22}\ldots y_{nn}.$$

Pour que l'on ait $st = ts$ il faut et il suffit que l'on ait $\xi_p \eta_q = \eta_q \xi_p$. Cela suffit évidemment. Ensuite, cela est nécessaire; car si $st = ts$ on a

$$s^2 t = sts = ts^2, \qquad s^3 t = ts^3, \qquad \ldots,$$
$$s^\alpha t^\beta = t^\beta s^\alpha, \qquad \ldots, \qquad f(s)\varphi(t) = \varphi(s) f(t).$$

Or on a

$$\mathrm{XY}\xi_p\eta_q = \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) \sum x_{jp} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{iq}} \tau_{ij},$$
$$\mathrm{YX}\eta_q\xi_p = \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right) \sum y_{jq} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{ip}} \tau_{ij},$$

et pour que $\xi_p \eta_q = \eta_q \xi_p$, il faut que l'on ait

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) x_{jp} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{iq}} \\ &= \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right) y_{jq} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{ip}}. \end{aligned}\right.$$

Laissons p, q, j fixes, multiplions les deux membres de cette formule par y_{iq} en faisant $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons, nous aurons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) x_{jp} \mathrm{Y} \\ &= \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right) \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) y_{iq}; \end{aligned}\right.$$

laissons p et q fixes, multiplions par $\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{jp}}$, faisons $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons, nous aurons

$$\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) \mathrm{XY}$$
$$= \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right) \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right)^2;$$

de là on conclut, ou bien

$$(3)\qquad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots = 0,$$

ou bien

$$(4)\qquad XY = \left(\frac{\partial Y}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial Y}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial X}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right).$$

En multipliant (2) par $\frac{\partial X}{\partial x_{jr}}, \ldots$ faisant $j = 1, 2, \ldots, n$ et ajoutant, on a

$$(5)\qquad 0 = \left(\frac{\partial Y}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \ldots\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x_{1r}} y_{1q} + \ldots\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \ldots\right).$$

Si l'on considère l'équation (3) elle ne peut avoir lieu quel que soit q, sans quoi on aurait $Y = 0$, il y aura donc des valeurs de p et q, telles que (4) ait lieu, en vertu de (5); si p et q sont de telles valeurs, il n'y aura qu'une valeur de p qui, associée à des valeurs de q, ne satisfait pas à (3). Des $n - 1$ équations (3) on déduira

$$y_{1p'} : x_{1p} = y_{2p'} : x_{2p} = \ldots,$$
$$y_{1q'} : x_{1q} = x_{2q'} : x_{2q} = \ldots,$$

et si $p' \gtrless q'$ on n'aura pas $p = q$, sans quoi on aurait $Y = 0$; il en résulte que l'on peut poser

$$\begin{array}{lll} y_{11} = x_{11}, & y_{12} = x_{12}, & \ldots, \\ y_{21} = x_{21}, & y_{22} = x_{22}, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \end{array}$$

et, par suite,

$$\xi_1 = y_1, \qquad \xi_2 = y_2, \qquad \ldots.$$

Les substitutions échangeables ont donc mêmes interpolaires et, par suite, sont des fonctions d'une même substitution normale.

Cette conclusion suppose que s et t sont des substitutions tout à fait générales, et si l'une d'elles ne pouvait pas affecter la forme $s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + \ldots$ on ferait varier ses coefficients infiniment peu, de manière à lui faire affecter la forme en question, et l'on arriverait aux mêmes conclusions.

IX. — Substitutions quasi-échangeables.

Maintenant proposons-nous de trouver deux substitutions s et t telles que l'on ait

$$st = \varepsilon ts,$$

ε désignant un nombre. Si n désigne le degré de s et t, ε ne saurait être quelconque; en effet, le déterminant de st devant être égal à celui de ts et à celui de $(\varepsilon t)s$; si donc les déterminants de s et t ne sont pas nuls il faudra que $\varepsilon^n = 1$: ainsi ε devra être racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Mais supposons s donné et cherchons t; pour calculer les β, il faudra résoudre n^2 équations de la forme linéaire

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_{1i}\beta_{j1} + \alpha_{2i}\beta_{j2} + \ldots + \alpha_{ni}\beta_{jn} \\ &\quad = \varepsilon(\beta_{1i}\alpha_{j1} + \beta_{2i}\alpha_{j2} + \ldots + \beta_{ni}\alpha_{jn}); \end{aligned} \right.$$

en éliminant les β on aura une équation en ε du degré n^2, dont chaque racine fera connaître un système de valeurs des β.

D'abord si l'on suppose s normale, toutes les fonctions de s au nombre de n linéairement distinctes seront pour $\varepsilon = 1$ des solutions des équations (1) dont les mineurs d'ordre $n - 1$ seront nuls : donc $\varepsilon = 1$ sera racine d'ordre n de l'équation en ε.

Toute racine de l'équation en ε sera d'ordre de multiplicité n, car si

$$st = \varepsilon ts,$$

on aura

$$(st) \times t = \varepsilon t \times (st);$$

donc si, pour une valeur de ε, t est une solution st,

$s^2 t$, ..., $f(s)t$ seront encore des solutions ; le raisonnement fait pour la racine 1 s'applique donc aux autres racines.

Si nous supposons toujours s normale, son équation caractéristique sera, par exemple,

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

et, par suite,

$$ts^n + a_1 t s^{n-1} + \ldots + t a_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon^n s^n t + a_1 \varepsilon^{n-1} s^{n-1} t + \ldots + a_n t = 0 ;$$

donc le déterminant de t est nul, ou le déterminant de

$$\varepsilon^n s^n + a_1 \varepsilon^{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_n,$$

ou enfin

$$\varepsilon^n s^n + a_1 \varepsilon^{n-1} s^{n-1} + \ldots = 0 ;$$

cette dernière hypothèse, puisque s est normale, donne

$$a_1 \varepsilon^{-1} = a_1, \quad a_2 \varepsilon^{-2} = a_2, \quad \ldots, \quad a_n \varepsilon^{-n} = a_n :$$

donc ε est racine de $\varepsilon^n - 1 = 0$ et $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ... ; l'équation caractéristique de s est une équation binome.

Voici un exemple de substitutions quasi-échangeables :

$$s = \tau_{12} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{n1},$$
$$t = \varepsilon\tau_{11} + \varepsilon^2\tau_{22} + \ldots + \varepsilon^n\tau_{nn}, \qquad \varepsilon^n = 1.$$

En effet

$$ts = \varepsilon\tau_{12} + \varepsilon^3\tau_{23} + \ldots + \varepsilon^n\tau_{n1},$$
$$st = \varepsilon^2\tau_{11} + \varepsilon^3\tau_{23} + \ldots + \varepsilon^{n+1}\tau_{n1}, \qquad st = \varepsilon ts.$$

La substitution s est une substitution circulaire ; les interpolaires de t sont τ_{11}, τ_{22}, ..., τ_{nn}, s et t sont normales ; on a

$$t^i = i^i\tau_{11} + \ldots + \varepsilon^{ni}\tau_{nn},$$
$$s^j = \tau_{1\,j+1} + \tau_{2\,j+2} + \tau_{3\,j+3} + \ldots,$$
$$s^i t^j = \varepsilon^{ij} t^j s^i,$$
$$t^i s^j = \varepsilon^i \tau_{1\,j+1} + \varepsilon^{2i}\tau_{2\,j+2} + \ldots.$$

X — Forme remarquable que peut prendre une substitution quelconque.

Soient s et t deux substitutions normales non échangeables, soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les interpolaires de s; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ celles de t. Supposons que l'on n'ait pour aucune valeur de i ou de j,

$$\xi_i \eta_j = 0;$$

il n'existera pas de relations de la forme

$$\Sigma a_{ij} \xi_i \eta_j = 0,$$

car s'il existait une semblable relation, en la multipliant à gauche par ξ_p à droite par η_q, on aurait

$$a_{pq} \xi_p \eta_q = 0 \quad \text{ou} \quad a_{pq} = 0,$$

puisque $\xi_p \eta_q$ ne peut être nul.

Considérons maintenant une substitution de degré n

$$V = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij},$$

posons

$$\Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij} = \Sigma a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

on satisfera à cette équation en remplaçant ξ_i et η_j par leurs valeurs τ_{ij} et, en identifiant, on aura ainsi des équations linéaires pour calculer les a_{ij}; le déterminant de ces équations ne sera pas nul sans quoi il existerait des relations de la forme

$$\Sigma a_{ij} \xi_i \xi_j = 0,$$

où les a_{ij} ne seraient pas tous nuls.

Ainsi V peut être mis sous la forme

$$\Sigma a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

donc toutes les substitutions peuvent être considérées comme des fonctions entières des deux mêmes substitutions.

On peut, par exemple, prendre

$$s = \tau_{11} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{n1},$$
$$t = \varepsilon\tau_{11} + \varepsilon^2\tau_{22} + \ldots \quad \varepsilon^n\tau_{nn},$$

alors

$$\eta_i = \tau_{ii},$$
$$\xi_i = \frac{1}{n}[(\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots) + \varepsilon^{-i}(\tau_{12} + \tau_{23} + \ldots) + \ldots],$$

et l'on n'a jamais

$$\eta_i\xi_j = 0 \qquad \text{ni} \qquad \xi_i\eta_j = 0.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\tau_{ij} = (\varepsilon^{j-i}\xi_1 + \varepsilon^{2j-2i}\xi_2 + \ldots + \varepsilon^{nj-ni}\xi_n)\eta_j.$$