Nouvelles annales de mathématiques

M. d'Ocagne

Sur les cordes normales de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 274-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__274_1>

[$L^1 10b$, $L^1 10c$]

SUR LES CORDES NORMALES DE LA PARABOLE;

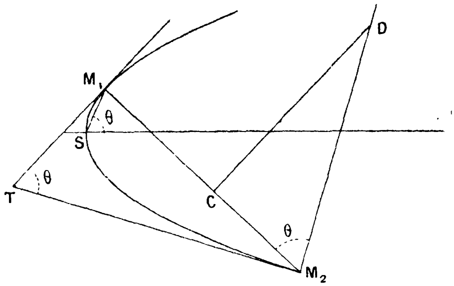
PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Soit $M_1 M_2$ une corde d'une parabole que nous supposons normale en M_1 à cette courbe. Proposons-nous d'abord de voir comment les coordonnées x_2 et y_2 du point M_2 sont liées aux coordonnées x_1 et y_1 du point M_1.

La parabole étant supposée rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, on a

$$y_1^2 = 2px_1, \tag{1}$$

$$y_2^2 = 2px_2. \tag{2}$$



Le point (x_2, y_2) étant sur la normale en (x_1, y_1), on a, en outre,

$$p(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) = 0. \tag{3}$$

Éliminant x_1 et x_2 entre ces trois équations, on a

$$(y_2^2 - y_1^2)\frac{y_1}{2p} + p(y_2 - y_1) = 0,$$

ou, en supprimant la solution $y_2 - y_1 = 0$ qui donne le point M_1,

$$(y_2 + y_1)\frac{y_1}{2p} + p = 0,$$

d'où

$$y_2 = -\frac{y_1^2 + 2p^2}{y_1}, \tag{4}$$

ou, eu égard à (1),

$$y_2 = -\frac{2p(x_1 + p)}{y_1}. \tag{4'}$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{y_2}{2p} = -\frac{x_1+p}{y_1},$$

ou, en vertu de (2),

$$\frac{x_2}{y_2} = -\frac{x_1+p}{y_1};$$

d'où, en remplaçant y_2 par sa valeur tirée de (4'),

(5) $$x_2 = \frac{2p(x_1+p)^2}{y_1^2},$$

ou, eu égard à (1),

(5') $$x_2 = \frac{(x_1+p)^2}{x_1}.$$

2. Calculons maintenant l'angle θ que font les tangentes en M_1 et en M_2 à la parabole. Ces tangentes faisant avec l'axe de la courbe des angles dont les tangentes sont respectivement $\frac{p}{y_1}$ et $\frac{p}{y_2}$, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{p}{y_1} - \frac{p}{y_2}}{1 + \frac{p^2}{y_1 y_2}} = \frac{p(y_2-y_1)}{y_1 y_2 + p^2}.$$

Or, la formule (4') donne

$$y_2 - y_1 = -\frac{2p(x_1+p)}{y_1} - y_1 = -\frac{2px_1 + 2p^2 + y_1^2}{y_1},$$

ou, eu égard à (1),

$$y_2 - y_1 = -\frac{2p(2x_1+p)}{y_1}$$

et

$$y_1 y_2 + p^2 = -2p(x_1+p) + p^2 = -p(2x_1+p).$$

Donc

$$\tag{6} \operatorname{tang}\theta = \frac{2p}{y_1}.$$

Remarquons qu'en vertu de (1) cette formule peut s'écrire

$$\tag{6'} \operatorname{tang}\theta = \frac{y_1}{x_1},$$

ce qui montre que *l'angle des tangentes en* M_1 *et* M_2 *à la parabole est égal à l'inclinaison sur l'axe de la droite qui joint le point* M_1 *au sommet.*

3. Cherchons la longueur l de la corde M_1M_2. Nous avons

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

ou, en vertu des formules (4) et (5'),

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\left[x_1 - \frac{(x_1+p)^2}{x_1}\right]^2 + \left[y_1 + \frac{y_1^2 + 2p^2}{y_1}\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{p^2(2x_1+p)^2}{x_1^2} + \frac{4(y_1^2+p^2)^2}{y_1^2}}, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (1),

$$l = (2x_1 + p)\sqrt{\frac{p^2}{x_1^2} + \frac{2p}{x_1}} = \frac{2x_1+p}{x_1}\sqrt{p^2 + y_1^2},$$

ou encore

$$\tag{7} l = \frac{(p^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{px_1}.$$

Si l'on rapproche cette formule de l'expression connue du rayon de courbure R en M_1,

$$R = \frac{(p^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

on arrive à cette curieuse relation

$$(8) \qquad \frac{R}{l} = \frac{x_1}{p}.$$

Le rapport du rayon de courbure en M_1 à la corde normale correspondant à ce point est égal au rapport de l'abscisse du point M_1 au paramètre.

4. A titre d'applications des formules précédentes, nous allons traiter divers problèmes de minimum relatifs aux cordes normales de la parabole. D'abord celui-ci :

Trouver la corde normale de longueur minimum?

Si la normale en M_2 à la parabole coupe en D la perpendiculaire élevée à $M_1 M_2$ par le centre de courbure C, c'est-à-dire la normale à la développée, on a, d'après une formule connue, en appelant ε l'angle de contingence en M_1,

$$dl = CD.\varepsilon.$$

Pour la corde minimum, on doit donc avoir

$$CD = 0.$$

Or, la normale en M_2 ne pouvant coïncider avec la normale $M_1 M_2$ en M_1, CD ne peut être nul que si le point C coïncide avec le point M_2 (¹), c'est-à-dire si $R = l$. La formule (8) donne, dès lors,

$$x_1 = p.$$

Le point M_1 correspondant a pour abscisse le para-

(¹) Cette propriété est, on le voit, absolument générale. Elle peut s'énoncer ainsi : *Si la normale en M_1 à une courbe quelconque rencontre, en outre, cette courbe au point M_2, le segment M_1M_2 est minimum si le point M_2 est un des points de rencontre de la courbe et de sa développée.*

mètre. Autrement dit : *Le point* M_1 *se trouve sur la perpendiculaire à l'axe menée par le centre de courbure répondant au sommet.*

5. Résolvons maintenant cet autre problème :

Trouver la corde normale qui détache sur la parabole l'arc de longueur minimum?

En appelant $d\sigma$ la différentielle de cet arc, ds_1 et ds_2 les différentielles des arcs comptés d'une origine quelconque aux points M_1 et M_2, on a

$$\begin{aligned} d\sigma &= ds_1 - ds_2 \\ &= (M_1C - M_2D)\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour l'arc minimum, on doit avoir

$$M_1C = M_2D,$$

ou, puisque l'angle CM_2D est égal à l'angle M_1TM_2, ou θ, comme ayant ses côtés perpendiculaires,

$$R = \frac{l - R}{\cos\theta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{l - R}{R} = \cos\theta.$$

Tirant la valeur de $\frac{l - R}{R}$ de la formule (8), celle de $\cos\theta$ de la formule (6), on a

$$\frac{p - x_1}{x_1} = \frac{y_1}{\sqrt{4p^2 + y_1^2}},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$\frac{(p - x_1)^2}{x_1^2} = \frac{x_1}{2p + x_1}.$$

Toutes réductions faites, cette équation devient

$$3x_1 - 2p = 0,$$

d'où

$$x_1 = \frac{2}{3}p.$$

Le point M_1 *correspondant a pour abscisse les* $\frac{2}{3}$ *du paramètre.*

La formule (1) donne

$$y_1 = \frac{2p}{\sqrt{3}},$$

puis la formule (6)

$$\tang\theta = \sqrt{3}.$$

Dans ce cas, l'angle θ est égal à 60°. On peut donc dire, puisque l'angle M_1M_2T, sous lequel la corde M_1M_2 coupe la parabole en M_2, est le complément de θ, que *la corde normale détachant sur la parabole l'arc de longueur minimum rencontre la courbe sous un angle de* 30°.

En vertu de la remarque qui termine le n° 2, on voit aussi que, dans ce cas, *la droite joignant le point* M_1 *au sommet est inclinée à* 60° *sur l'axe.*

6. Occupons-nous enfin de ce problème :

Trouver la corde normale qui détermine, avec la parabole, le segment d'aire minimum.

Si Σ est cette aire, on a, en appelant $M'_1M'_2$ la corde normale infiniment voisine, qui passe (aux infiniment petits d'ordre supérieur près) par le centre de courbure C,

$$\begin{aligned} d\Sigma &= \text{aire}\, M_1M_2C - \text{aire}\, M'_1M'_2C \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{CM}_1^2 - \overline{CM}_2^2\right)\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour le segment d'aire minimum,

$$CM_1 = CM_2,$$

ou

$$l = 2\,R.$$

Dès lors, la formule (8) donne

$$x_1 = \frac{p}{2},$$

ce qui montre que *le point* M_1 *est sur la perpendiculaire menée à l'axe par le foyer.*

Nous retrouvons ainsi un théorème que nous avons, dans une précédente Note [1], obtenu par une tout autre voie.