E. DUPORCQ

Quelques propriétés des biquartiques gauches

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 266-270

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__266_1>

[$M^3 6b$]

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES BIQUARTIQUES GAUCHES;

Par M. E. DUPORCQ,
Élève-Ingénieur des Télégraphes.

1. On sait que toutes les quadriques, qui passent par 7 points quelconques de l'espace, passent par un huitième point fixe. Il en résulte que, à 7 points arbitraires d'une biquartique gauche correspond un huitième point de cette courbe. Je me propose de mettre en évidence quelques propriétés de ces groupes de huit points *réciproques*.

2. Je commencerai par rappeler quelques propriétés simples des biquartiques gauches.

Soient a et b deux points quelconques d'une biquartique gauche C : il existe une quadrique Q qui passe par la courbe C et qui admet la droite ab pour génératrice. A tout point a' de la biquartique correspond sur cette courbe un point b', tel que la droite $a'b'$ est, dans la quadrique Q, une génératrice de même système que la génératrice ab. Je dirai que les couples ab et $a'b'$ sont *conjugués*.

3. Soient α, β, γ et δ quatre points quelconques d'une biquartique C; par $\beta\gamma$ menons un plan quelconque qui rencontre la courbe C en deux autres points b et c, et soient a et d les quatrièmes points d'intersection de la quartique avec les plans $\alpha\beta b$ et $c\gamma\delta$. Soient a', b', c' et d' quatre autres points obtenus de la même manière au moyen des points α, β, γ et δ.

Les droites ab et $a'b'$, rencontrant toutes deux $\alpha\beta$, sont évidemment des génératrices de système différent de $\alpha\beta$ dans la quadrique déterminée par cette droite et par la courbe C; autrement dit, ab et $a'b'$ forment deux couples conjugués sur la quadrique; il en est de même des couples bc et $b'c'$, cd et $c'd'$.

D'autre part, les droites $b\beta$ et $c\gamma$ sont deux génératrices de systèmes différents d'une quadrique passant par C; dans cette quadrique, $a\alpha$ et $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$ forment de même deux couples de génératrices de systèmes différents; il en résulte que $a\alpha$ et $d\delta$ jouissent de la même propriété; autrement dit, les droites ad et $\alpha\delta$ sont dans un même plan. Pour la même raison, $a'd'$ rencontre aussi $\alpha\delta$. On voit donc que les couples ad et $a'd'$ sont conjugués.

On peut donc énoncer le théorème suivant, qui s'étendrait évidemment à des polygones gauches d'un nombre pair de côtés :

Si, sur une biquartique gauche, deux quadrilatères gauches $abcd$ et $a'b'c'd'$ sont tels que les couples ab, *bc et cd soient respectivement conjugués des couples a'b', b'c' et c'd', les couples da et d'a' seront conjugués, eux aussi.*

4. Ces préliminaires établis, soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 huit points réciproques sur une biquartique gauche C. Considérons la cubique gauche déterminée par les six premiers de ces points ; toutes les quadriques qui passent par cette courbe et par le point 7 ont en commun une génératrice, qui n'est autre que la droite 78, puisque toutes les quadriques envisagées, qui passent par les sept premiers points considérés, passent aussi par le point 8. Parmi ces quadriques, considérons en particulier celle qui passe par la biquartique C ; elle admet la droite 78 pour génératrice. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Toutes les quadriques qui passent par six points fixes d'une biquartique gauche coupent cette courbe en deux autres points : les droites déterminées par ces couples de points sont des génératrices de la quadrique qui passe par la biquartique en même temps que par la cubique gauche définie par les six points fixes. Elles constituent le système des génératrices qui coupent en deux points la cubique gauche.

5. Parmi les couples de points 78, on peut considérer, par exemple, celui que fournissent les quatrièmes points d'intersection de la biquartique C avec les plans 123 et 456. Par suite :

Huit points réciproques d'une biquartique sont tels que deux quelconques d'entre eux sont conjugués des quatrièmes points où la courbe rencontre les deux plans déterminés par les six autres points, pris trois à trois d'une manière quelconque.

6. On voit que si cinq de ces points sont fixes, le plan des trois autres passe par un point fixe de la biquartique.

7. Étant donnés, sur une biquartique C, huit points réciproques 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8, supposons que par les quatre premiers on fasse passer une quadrique qui coupe la courbe en quatre autres points, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$. Soient de même $5'$, $6'$, $7'$ et $8'$ quatre points de la courbe formant un octuple réciproque avec les points 5, 6, 7 et 8. Désignons par α, β, α' et β' les points où la courbe C rencontre les plans 123, 567, $1'2'3'$ et $5'6'7'$. D'après (5), les couples $\alpha\beta$, $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ sont respectivement conjugués des couples 48, $44'$ et $88'$; il en est donc, d'après (3), de même des couples $\alpha'\beta'$ et $4'8'$. Par suite (5), les huit points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$ et $8'$ sont réciproques. D'où le théorème suivant :

Si, sur une biquartique gauche

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1' & 2' & 3' & 4' \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 5' & 6' & 7' & 8' \end{array}$$

sont trois octuples réciproques, il en est de même de l'octuple

$$1'\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'\ 6'\ 7'\ 8'.$$

8. Parmi les nombreux cas particuliers de ce théorème, je me contenterai d'énoncer le suivant :

Soient $a_1 a_2 a_3 a_4$, $b_1 b_2 b_3 b_4$ et $c_1 c_2 c_3 c_4$ les points où une biquartique gauche coupe trois plans P_a, P_b, P_c. Les plans P_1, P_2, P_3 et P_4, définis respectivement par les triples $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ et $a_4 b_4 c_4$, coupent la courbe en quatre autres points $d_1 d_2 d_3$ et d_4 situés dans un même plan P_d.

9. Je me bornerai à signaler l'analogie de ces propriétés des biquartiques gauches avec des propriétés correspondantes des cubiques planes.