

X. STOUFF

Sur une application des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15
(1896), p. 262-266

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__262_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[F8f]

SUR UNE APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. X. STOUFF,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, représenté par l'équation

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$

on suppose que

$$(2) \quad 2b^2 = a^2 + c^2,$$

on demande de trouver les lignes de cette surface qui, en chacun de leurs points, sont tangentes aux diagonales du rectangle des axes de l'indicatrice de ce point.

En désignant par λ et μ les deux racines, différentes de zéro, de l'équation

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 + \rho} + \frac{z^2}{c^2 + \rho} - 1 = 0,$$

les lignes asymptotiques de l'ellipsoïde ont pour équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} = \frac{\pm d\mu}{\sqrt{(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu)}}.$$

θ étant l'angle (imaginaire) que fait l'une de ces lignes asymptotiques avec une ligne de courbure, ω l'angle que fait une diagonale du rectangle des axes de l'indicatrice avec la même ligne de courbure, on a

$$\text{tang } \omega = \pm i \text{ tang } \theta,$$

et l'équation différentielle des lignes cherchées est, par suite,

$$(4) \quad \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} = \frac{\pm i d\mu}{\sqrt{(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu)}}.$$

Nous pouvons poser

$$\begin{aligned} b^2 + \lambda &= (b^2 - a^2) \text{sn}^2 u, & b^2 + \mu &= (a^2 - b^2) \text{sn}^2 v, \\ a^2 + \lambda &= (a^2 - b^2) \text{cn}^2 u, & a^2 + \mu &= (a^2 - b^2) \text{dn}^2 v, \\ c^2 + \lambda &= (c^2 - b^2) \text{dn}^2 u, & c^2 + \mu &= (c^2 - b^2) \text{cn}^2 v. \end{aligned}$$

En effet, les fonctions sn , cn , dn ainsi définies vé-

rifient les relations fondamentales en prenant pour module $k = i$. L'équation (4) devient alors

$$du = \pm dv,$$

d'où

$$u \pm v = \alpha,$$

α étant une constante

$$u = \int \frac{d \operatorname{sn} u}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^4 u}}, \quad v = \int \frac{d \operatorname{sn} v}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^4 v}}.$$

On sait, d'après le *Calcul intégral* de Bertrand (p. 569) que la relation précédente équivaut à

$$(5) \quad \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v + m \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v = m - 2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} v \sqrt{1 - m^2}.$$

On déduit aisément de (5) les équations en coordonnées rectilignes des courbes cherchées, d'après les relations faciles à vérifier

$$\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v = \frac{\gamma}{b}, \quad \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v = \frac{\lambda - \mu}{b^2 - a^2}.$$

D'après (3), en tenant compte de (2) et en posant

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on a

$$\lambda - \mu = \sqrt{\left(r^2 - \frac{a^2 + c^2}{2}\right)^2 + y^2 \frac{(a^2 - c^2)^2}{b^2}},$$

(5) devient alors

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(r^2 - \frac{a^2 + c^2}{2}\right)^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2}{4} \\ \cdot \quad \times \left[m \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y}{b} (\sqrt{1 - m^2} + 1) - m \right] \\ \cdot \quad \times \left[m \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{y}{b} (\sqrt{1 - m^2} - 1) - m \right]. \end{array} \right.$$

L'équation (6) représente une surface de révolution : son second membre est le produit de quatre facteurs linéaires réels, et peut se mettre sous une forme remar-

quable et avantageuse pour la discussion. En posant $m = \sin \varphi$, $\frac{y}{b} = \tan \theta$, le second membre de (6) devient

$$\frac{(a^2 - c^2)^2}{4} \sin^2 \varphi \left(\tan \theta - \tan \frac{\varphi}{4} \right) \left[\tan \theta - \tan \left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ \times \left[\tan \theta - \tan \left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \left[\tan \theta - \tan \left(\frac{\varphi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) \right],$$

et, à l'aide d'identités trigonométriques élémentaires,

$$\frac{(a^2 - c^2)^2}{4} \frac{\sin \varphi \sin(\varphi - 4\theta)}{\cos^4 \theta},$$

(6) donne alors

$$(7) \quad r^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} \pm \frac{a^2 - c^2}{2} \frac{\sqrt{\sin \varphi \sin(\varphi - 4\theta)}}{\cos^2 \theta},$$

Il est naturel de chercher à exprimer x , y , z en fonction de θ . Par un calcul facile et ne présentant pas de circonstances remarquables, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\cos 2\theta + \sqrt{\sin \varphi \sin(\varphi - 4\theta)}}{2 \cos^2 \theta}, \\ \frac{z^2}{c^2} = \frac{\cos 2\theta - \sqrt{\sin \varphi \sin(\varphi - 4\theta)}}{2 \cos^2 \theta};$$

$\frac{x^2}{a^2}$ et $\frac{z^2}{c^2}$ sont donc racines d'une équation du second degré

$$(8) \quad Z^2 \cos^4 \theta - Z \cos 2\theta \cos^2 \theta + \frac{\cos^2(2\theta + \varphi)}{4} = 0.$$

On ne devra donner à θ que des valeurs qui rendent réelles les racines de cette équation et toutes deux comprises entre 0 et 1. On voit de suite que les conditions relatives aux résultats de substitution et à la demi-somme sont toujours remplies. Donc il suffit que

$$\sin \varphi \sin(\varphi - 4\theta) \geq 0.$$

$\frac{y}{b}$ devant être compris entre -1 et $+1$, on devra avoir aussi

$$-1 \leq \operatorname{tang} \theta \leq 1.$$

L'angle φ variant de 0 à 2π on aura deux cas à distinguer. Si φ est moindre que π , θ devra varier de $\frac{\varphi}{4} - \frac{\pi}{4}$ à $\frac{\varphi}{4}$. Si φ est supérieur à π , on fera varier θ de $\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2}$ à $\frac{\varphi}{4} + \frac{3\pi}{4}$. Cela donnera dans les deux cas toute la courbe. Pour $\varphi = 0$, on obtient les sections cycliques de la surface. Les autres courbes sont fermées, analogues aux sections cycliques et admettent les plans cycliques comme plans diamétraux.