

LOUIS RAFFY

**Une leçon sur la méthode de
quadrature de Gauss**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15
(1896), p. 249-262

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__249_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[C2j]

UNE LEÇON SUR LA MÉTHODE DE QUADRATURE DE GAUSS;

PAR M. LOUIS RAFFY,

Maître de Conférences à l'École Normale supérieure.

Le programme de l'agrégation des Sciences mathématiques pour 1896 porte comme épreuve pratique le calcul d'une intégrale par la méthode de Gauss. Il renvoie les candidats à un Ouvrage épuisé depuis bien des années et où, d'ailleurs, la question de l'approximation obtenue n'est pas posée. Pour ces raisons nous croyons utile de publier la présente Leçon.

1. Ayant à intégrer une fonction $F(x)$ entre deux limites *données* α et β , on remplace cette fonction par un polynôme entier $G(x)$, de degré $n-1$, qui pour n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n , comprises entre α et β , acquière les mêmes valeurs que $F(x)$, et l'on prend pour valeur de l'intégrale proposée l'intégrale du polynôme $G(x)$. Tel est le principe des quadratures par interpolation (Newton, Cotes, Gauss).

On sait que le polynôme $G(x)$ est unique et a pour expression

$$(1) \quad G(x) = \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r(x) F(x_r),$$

si l'on pose

$$(2) \quad \gamma_r(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\dots(x-x_n)}{(x_r-x_1)\dots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\dots(x_r-x_n)}.$$

Les polynômes γ_r ne dépendent que des nombres x_r et nullement de la fonction $F(x)$. Leurs intégrales

$$(3) \quad g_r = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma_r(x) dx$$

ne dépendront donc absolument que de ces mêmes nombres x_r , de α et de β , et l'on aura pour l'intégrale cherchée

$$(4) \quad \int_{\alpha}^{\beta} G(x) dx = g_1 F(x_1) + \dots + g_r F(x_r) + \dots + g_n F(x_n).$$

Il suffit que les intégrales g_r soient calculées une fois pour toutes.

2. Pour nous faire une idée de ce que Gauss appelle *le degré de précision* de la méthode précédente, supposons que la fonction à intégrer $F(x)$ soit développable entre α et β par la formule de Mac-Laurin,

$$(5) \quad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

Le polynome $G(x)$ pourra être écrit

$$(6) \quad G(x) = \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r(x) (a_0 + a_1 x_r + a_2 x_r^2 + \dots + a_m x_r^m + \dots).$$

Réunissons tous les termes en a_0 , tous les termes en a_1 , et ainsi de suite, ce qui donnera

$$(6)' \quad G(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_m \varphi_m(x) + \dots;$$

enfin formons la différence

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} G(x) dx.$$

Nous pourrons l'écrire

$$(7) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [F(x) - G(x)] dx = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_m \int_{\alpha}^{\beta} [x^m - \varphi_m(x)] dx.$$

Cette expression de l'erreur donne lieu à une remarque importante :

Quels que soient les nombres x_1, x_2, \dots, x_n , la sé-

rie (7) ne contient aucun coefficient à d'indice moindre que n ; ou encore : *Les deux intégrales*

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta} G(x) dx,$$

ordonnées suivant les coefficients a_r , ont leurs n premiers termes communs.

Voici comment on peut s'en assurer sans calcul. Les polynomes $\gamma_r(x)$ étant indépendants de la fonction $F(x)$, les polynomes $\varphi_m(x)$ n'en dépendent pas non plus. Nous les déterminerons donc en attribuant à $F(x)$ une forme particulière, celle d'un polynome entier de degré $n - 1$,

$$(5)' \quad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Dans ce cas $G(x)$, qui prend les mêmes valeurs que $F(x)$ pour n valeurs de x , lui est identique, quels que soient les coefficients a_r , et l'on a

$$\varphi_m(x) \equiv x^m$$

pour les valeurs $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, ce qui prouve bien que la série (7) commence par un terme en a_n . Si donc nous appelons *degré de précision* de la méthode l'indice du premier coefficient de $F(x)$ qui figure dans l'expression, nous dirons : *Les nombres x_1, x_2, \dots, x_n étant quelconques, le degré de précision de la méthode de quadrature par interpolation est égal à n .*

3. THÉORÈME. — *Par un choix convenable des nombres x_1, x_2, \dots, x_n , le même d'ailleurs quelle que soit la fonction à intégrer, on peut porter au double le degré de précision de la méthode.*

Cette proposition, due à Gauss, revient à ceci : *On peut choisir les nombres x_1, x_2, \dots, x_n , de telle façon*

que dans la série (7) les intégrales qui multiplient les coefficients $a_n, \dots, a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}$ soient nulles.

Pour établir ce résultat et retrouver en même temps le précédent, considérons le polynome

$$(8) \quad \varphi_m(x) = \gamma_1(x)x_1^m + \gamma_2(x)x_2^m + \dots + \gamma_m(x)x_n^m.$$

C'est évidemment, d'après la formule générale (1), le polynome de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui prend les mêmes valeurs que x^m pour n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n . En conséquence pour les valeurs $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, il est identique à x^m , ce qui prouve le théorème du n° 2.

Pour $m \geq n$, en faisant la division de x^m par le produit

$$(9) \quad \xi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

on trouve

$$x^m = \xi_n(x)Q_{m-n}(x) + \varphi_m(x),$$

car le reste est un polynome de degré inférieur ou égal à $n-1$, qui prend les mêmes valeurs que x^m pour les n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n , et qui, par suite, n'est autre que $\varphi_m(x)$. On a donc identiquement

$$(10) \quad x^m - \varphi_m(x) = \xi_n(x)Q_{m-n}(x),$$

le polynome Q étant d'un degré marqué par son indice.

Exprimons maintenant l'énoncé. On veut que les n intégrales

$$(11) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [x^m - \varphi_m(x)] dx \quad (m = n, n+1, \dots, 2n-1)$$

soient nulles, ou, ce qui revient au même, en vertu de la formule (10), que l'intégrale

$$(12) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \xi_n(x)(a_n Q_0 + a_{n+1} Q_1 + \dots + a_{2n-1} Q_{n-1}) dx$$

soit nulle, quelles que soient les constantes a_n, \dots, a_{2n-1} . Or il est aisé de voir qu'on peut déterminer *suc-*
cessivement $a_{2n-1}, a_{2n-2}, \dots, a_{n+1}, a_n$ de manière que
le polynome

$$a_{2n-1}Q_{n-1} + a_{2n-2}Q_{n-2} + \dots + a_{n+1}Q_1 + a_nQ_0,$$

dont les composants Q sont chacun du degré marqué
par leur indice, soit identique à un polynome *arbitraire*
du degré $n - 1$. Il faut donc et il suffit que l'on ait

$$(13) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \xi_n(x) V(x) dx = 0,$$

en désignant par $V(x)$ un polynome *arbitraire*, du de-
gré $n - 1$. S'il existe un polynome $\xi_n(x)$ de degré n ,
admettant n racines comprises entre α et β , et satisfaisant
à cette condition, il est évident qu'il n'y aura qu'à
prendre pour x_1, x_2, \dots, x_n les racines de ce poly-
nome; on annulera ainsi les n intégrales (11), et cela
quelle que soit la fonction à intégrer $F(x)$, puisque
ces intégrales n'en dépendent pas.

Je dis qu'on peut prendre pour $\xi_n(x)$ le polynome

$$(14) \quad \frac{d^n}{dx^n} (x - \alpha)^n (x - \beta)^n.$$

En effet, ce polynome est évidemment d'ordre n ; d'après
le théorème de Rolle, il admet n racines comprises entre
 α et β . Car si l'on pose pour abrégé

$$\psi(x) = (x - \alpha)^n (x - \beta)^n,$$

on voit immédiatement que la dérivée $\psi'(x)$ admet
 $n - 1$ fois les racines α et β , et de plus une racine com-
prise entre α et β . En appliquant encore le théorème de
Rolle on reconnaît que toute dérivée $\psi^{(p)}(x)$ ($p \leq n$)
admet les deux racines α et β avec l'ordre de multipli-
cité $n - p$ et, en outre, p racines comprises entre α et β .

Pour établir la dernière propriété, rappelons une formule que donne l'intégration par parties,

$$\int V(x) \psi^{(n)}(x) dx = V \psi^{(n-1)} - V' \psi^{(n-2)} + V'' \psi^{(n-3)} + \dots \\ + (-1)^n \int V^{(n)}(x) \psi(x) dx.$$

Si l'on intègre entre α et β , les n premiers termes du second membre disparaissent, puisque les $n - 1$ premières dérivées de ψ s'annulent pour α et β ; le dernier s'évanouit également, puisque la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $V(x)$ se réduit à zéro. L'équation (13) est donc bien vérifiée par le polynome (14).

Il est d'ailleurs aisé de montrer que tout polynome $\zeta(x)$ de même degré que $\xi_n(x)$ et jouissant de la propriété qu'exprime l'équation (13) ne peut différer de $\xi_n(x)$ que par un facteur constant. En effet, si l'on a simultanément

$$\int_{\alpha}^{\beta} \xi_n(x) V(x) dx = 0, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \zeta(x) V(x) dx = 0,$$

on en conclura

$$(15) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [\xi_n(x) - k\zeta(x)] V(x) dx = 0,$$

quelle que soit la constante k . Or on peut choisir cette constante de telle sorte que le polynome $\xi_n - k\zeta$ s'abaisse au degré $n - 1$. Cela étant, comme la relation précédente est supposée avoir lieu quel que soit le polynome $V(x)$ de degré $n - 1$, on pourra prendre pour $V(x)$ précisément $\xi_n - k\zeta$, ce qui réduira l'identité (15) à

$$\int_{\alpha}^{\beta} V^2(x) dx = 0;$$

par suite V est identiquement nul, ce qui prouve la proposition.

4. *Résumé; mode d'application.* — Pour appliquer la méthode de Gauss, il faut :

1° Connaître les racines x_1, x_2, \dots, x_n de l'équation

$$\frac{d^n}{dx^n}(x - \alpha)^n (x - \beta)^n = 0;$$

2° Connaître les coefficients g_r définis au n° 1, savoir

$$(3) \quad g_r = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma_r(x) dx \quad (r = 1, 2, \dots, n);$$

3° Calculer l'intégrale cherchée en effectuant la somme

$$(4) \quad g_1 F(x_1) + g_2 F(x_2) + \dots + g_n F(x_n),$$

au moyen des valeurs que prend pour x_1, x_2, \dots, x_n la fonction à intégrer $F(x)$.

Il convient d'ailleurs de remarquer que, une fois connus les nombres x_1, x_2, \dots, x_n , les intégrales g_1, g_2, \dots, g_n peuvent être calculées par la résolution de n équations du premier degré. En effet, en vertu de la formule (8), on a identiquement

$$(8) \quad x^m = \gamma_1(x) x_1^m + \gamma_2(x) x_2^m + \dots + \gamma_n(x) x_n^m,$$

pour $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. On déduit de là par intégration

$$\frac{\beta^{m+1} - \alpha^{m+1}}{m+1} = g_1 x_1^m + g_2 x_2^m + \dots + g_n x_n^m,$$

et donnant à m les valeurs $0, 1, 2, \dots, n - 1$, on a n équations du premier degré propres à déterminer les n inconnues g_1, g_2, \dots, g_n .

Il est avantageux de ramener les limites α et β de l'intégrale à être deux nombres fixes. On peut choisir, comme l'a fait Gauss, les nombres 0 et 1. A cet effet,

dans l'intégrale proposée

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt,$$

on opère le changement de variable

$$t = \alpha + (\beta - \alpha) x.$$

Alors l'équation $\xi_n(x) = 0$, dont les racines sont prises pour valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n , devient

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n (x-1)^n = 0.$$

Gauss a calculé avec seize décimales les racines de sept équations de cette forme ($n=1, 2, \dots, 7$) et les valeurs correspondantes des coefficients g_r .

On peut aussi ramener les limites de l'intégrale proposée

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt$$

à être -1 et $+1$. Il suffit de poser

$$t = \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} x.$$

Alors le polynôme $\xi_n(x)$, dont les racines sont prises pour valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n , n'est autre que

$$\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

C'est, à un facteur constant près, le polynôme X_n de Legendre.

§. *Limite de l'erreur.* — Nous allons maintenant traiter, d'après M. Markoff, dont nous simplifierons l'analyse, une question importante, entièrement négligée par Gauss : *Trouver une limite supérieure de l'er-*

reur commise quand on applique la méthode précédente. Établissons d'abord un résultat dont nous aurons à faire usage.

THÉORÈME. — Si une fonction $F(x)$ et un polynôme $\Phi(x)$ de degré $2n - 1$ prennent les mêmes valeurs ainsi que leurs dérivées $F'(x)$ et $\Phi'(x)$ pour n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n de la variable, et si l'on pose

$$(16) \quad F(x) - \Phi(x) = [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)]^2 P(x),$$

on aura

$$(17) \quad P(x) = \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

ξ étant compris entre le plus grand et le plus petit des nombres x, x_1, x_2, \dots, x_n .

Pour le prouver, je dis que si une fonction $f(x)$ et sa dérivée s'annulent pour $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, on a

$$(18) \quad f(x) = [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)]^2 \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

ξ étant compris entre le plus grand et le plus petit des nombres x, x_1, x_2, \dots, x_n .

En effet, il est visible que la fonction

$$f(z) - \left[\frac{(z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_n)}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)} \right]^2 f(x)$$

admet la racine simple $z = x$ et les n racines doubles

$$z = x_1, \dots, x_n.$$

En appliquant à ses dérivées successives le théorème de Rolle, on reconnaît que celle d'ordre $2n$ s'annule pour un nombre ξ , compris entre la plus grande et la plus petite de ces $n + 1$ valeurs : d'où résulte l'équation qu'il s'agissait d'établir.

La proposition annoncée est par là-même établie, car il suffit, dans l'équation (18), de remplacer $f(x)$ par $F(x) - \Phi(x)$ et de remarquer que la dérivée d'ordre $2n$ de $\Phi(x)$ est identiquement nulle pour trouver

$$F(x) - \Phi(x) = [(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)]^2 \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

d'où, par comparaison avec la formule (16),

$$P(x) = \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

6. Cela posé, convenons que les nombres x_1, x_2, \dots, x_n soient les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée d'ordre n du polynome

$$(19) \quad \psi(x) = (x^2 - 1)^n.$$

L'erreur ε commise en appliquant la méthode de Gauss avec ces valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x) dx$$

a évidemment pour expression

$$(20) \quad \varepsilon = \int_{-1}^{+1} [F(x) - G(x)] dx.$$

Pour l'évaluer, substituons au polynome $G(x)$ un polynome $\Phi(x)$ de degré $2n - 1$

$$(21) \quad \Phi(x) = G(x) + \psi^{(n)}(x) \theta_{n-1}(x)$$

qui prend évidemment les mêmes valeurs que $G(x)$ et, par suite, que $F(x)$ pour les racines x_1, x_2, \dots, x_n de $\psi^{(n)}(x)$; il en sera ainsi quel que soit le polynome θ_{n-1} de degré $n - 1$. Mais nous pouvons supposer ce polynome déterminé de telle manière que la dérivée de $\Phi(x)$ prenne les mêmes valeurs que celle de $F(x)$ pour ces

mêmes nombres. Car, désignant l'un d'eux par x_r , on a

$$\Phi'(x_r) = F'(x_r) = G'(x_r) + \psi^{(n+1)}(x_r) \theta_{n-1}(x_r),$$

ce qui détermine le polynome θ_{n-1} par les valeurs qu'il acquiert pour les n valeurs considérées de x .

Le polynome $\Phi(x)$ que nous venons de définir peut être substitué à $G(x)$ dans l'évaluation de l'erreur ε , car on a visiblement

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(x) dx = \int_{-1}^{+1} G(x) dx + \int_{-1}^{+1} \psi^{(n)}(x) \theta_{n-1}(x) dx.$$

Or, dans cette identité, la seconde intégrale du second membre est nulle, d'après la propriété caractéristique des polynomes de Legendre.

7. Nous sommes ainsi ramenés à évaluer l'intégrale

$$(22) \quad \varepsilon = \int_{-1}^{+1} [F(x) - \Phi(x)] dx.$$

Mais, à raison des deux propriétés que nous avons données au polynome $\Phi(x)$, le théorème du n° 5 lui est applicable et l'on a

$$(16)' \quad F(x) - \Phi(x) = [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)]^2 \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

ξ étant un nombre évidemment variable avec x , mais compris entre le plus petit et le plus grand des nombres x, x_1, x_2, \dots, x_n , et, par suite, compris entre -1 et $+1$ quand x varie entre ces limites. Par suite l'intégrale

$$(22)' \quad \varepsilon = \frac{1}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)]^2 F^{(2n)}(\xi) dx,$$

dont l'élément différentiel se compose de deux facteurs, dont l'un est essentiellement positif, pourra être écrite

$$(23) \quad \varepsilon = \frac{\mu}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)]^2 dx,$$

μ désignant un nombre compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs que la fonction $F^{(2n)}(\xi)$ acquiert quand x varie entre -1 et $+1$. Mais comme ξ est une fonction de x dont la valeur est elle-même comprise dans ces conditions entre -1 et $+1$, on voit que μ est un nombre compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend la dérivée $F^{(2n)}(x)$ quand x varie de -1 à $+1$. On peut donc le représenter par $F^{(2n)}(\xi_0)$, ξ_0 étant un certain nombre compris entre -1 et $+1$, ce qui donne

$$(24) \quad \varepsilon = \frac{F^{2n}(\xi_0)}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} [(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)]^2 dx.$$

L'intégrale qui figure au second membre est facile à calculer. En effet, le polynôme X_n de Legendre ayant pour définition

$$X_n = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

si x_1, x_2, \dots, x_n sont ses racines, on aura

$$X_n = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n! 2^n} (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

d'où l'on tire

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = \frac{n! 2^n X_n}{2n(2n-1)\dots(n+1)}.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} [(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)]^2 dx \\ &= \frac{n! n! 2^{2n}}{[2n(2n-1)\dots(n+1)]^2} \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx. \end{aligned}$$

Or on connaît la formule

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1};$$

on a donc cette expression finale de l'erreur,

$$(25) \quad \varepsilon = \frac{n! 2^{2n+1}}{[2n(2n-1)\dots(n+1)]^3} \frac{F^{(2n)}(\xi_0)}{2n+1},$$

où ξ_0 , on l'a vu, est compris entre -1 et $+1$.

Si l'on peut trouver la plus grande valeur absolue M de la dérivée $F^{(2n)}(x)$ entre -1 et $+1$, il suffira évidemment de substituer M à $F^{(2n)}(\xi_0)$ dans la formule précédente (25) pour avoir une limite supérieure de l'erreur et que l'on commet en employant un polynôme $G(x)$ d'un degré donné $n-1$, sans d'ailleurs en connaître le sens.

8. Mais si l'on assigne *a priori* l'approximation exigée, on n'a pas ainsi le moyen de déterminer d'avance le degré $n-1$ du polynôme à employer. Rien ne prouve, en outre, que l'erreur diminue quand n augmente. Ajoutons que la méthode de Gauss exige de longs calculs pour la détermination approchée des racines x_r d'équations algébriques de degré élevé, pour la substitution de ces nombres, qui sont compliqués, dans la fonction à intégrer, enfin pour la détermination des intégrales auxiliaires g_r . Elle présente donc, avec un certain intérêt théorique, de graves défauts dans l'application.

Elle n'est d'un emploi commode que quand la fonction à intégrer $F(x)$ est une fraction rationnelle. On peut alors, se donnant n et par suite le polynôme ξ_n , déterminer *algébriquement*, sans aucun calcul d'approximation, le polynôme $G(x)$, du degré $n-1$, qui prend les mêmes valeurs que $F(x)$ pour les n racines x_r de l'équation $\xi_n = 0$. L'intégration de ce polynôme fournira *exactement* la valeur approchée de l'intégrale. Mais l'évaluation de l'erreur sera toujours très laborieuse.

Exemple. — Soit à calculer l'intégrale

$$\pi = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2 + 1},$$

au moyen de quatre valeurs intermédiaires de x . Ici, n étant égal à 4, le polynôme ξ_n est, à un facteur constant près, la dérivée quatrième de $(x^2 - 1)^4$, savoir

$$\xi_4 = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{3}.$$

L'identité algébrique

$$35\xi_4 - 68 = 5(x^2 + 1)(7x^2 - 13)$$

montre que l'on aura, pour les quatre racines de ξ_4 ,

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{5}{68}(13 - 7x^2).$$

On prendra donc pour valeur approchée de π

$$\frac{5}{34} \int_{-1}^{+1} (13 - 7x^2) dx = \frac{5 \cdot 32}{3 \cdot 34} = \frac{80}{51} = 3,137.$$

Comme on connaît la valeur de π on voit que l'erreur est 0,004; mais si l'on voulait en déterminer une limite supérieure en appliquant la formule (25), on serait conduit à des calculs fort longs.