NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE BOREL

# Remarque sur les problèmes de forces centrales

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 15 (1896), p. 236-238

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__236_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

[R7bβ]

# REMARQUE SUR LES PROBLÈMES DE FORCES CENTRALES;

PAR M. ÉMILE BOREL.

On sait que les problèmes de forces centrales se ramènent aux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = C, \\ \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\varphi(r) = h. \end{cases}$$

Supposons que nous voulions reconnaître, sur ces équations, s'il est possible que le mobile décrive un cercle de rayon donné $a$ ayant son centre à l'origine, avec une vitesse angulaire donnée $\omega$. En remplaçant $r$ par la constante $a$ et $\dfrac{d\theta}{dt}$ par la constante $\omega$ ces équations deviennent

$$(2)\qquad \begin{cases} a^2\omega = C, \\ a^2\omega^2 - 2\varphi(a) = h, \end{cases}$$

et sont par suite vérifiées, pourvu que C et $h$ aient des valeurs convenables. Inversement, à un système quelconque de valeurs de C et $h$ correspond en général, par les équations (2), un système de valeurs de $a$ et $\omega$. On est ainsi conduit à une série de conséquences absurdes qu'il est inutile d'énoncer.

Dans les Traités de Mécanique, pour rechercher avec quelle vitesse angulaire peut être décrit un cercle donné sous l'influence d'une force centrale donnée, on écrit que la projection de l'accélération sur la normale est égale à la force (la masse étant prise pour unité) ; il est inutile de refaire ce calcul. Mais je voudrais indiquer pourquoi, en se servant des équations (1) pour résoudre cette question, on obtient un résultat absurde ; cela tient simplement à ce que ces équations ont été déduites des équations du mouvement

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y,\end{aligned}\right.$$

en les multipliant respectivement par $y$, $-x$ et par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$. Le système (1) n'est donc équivalent au système (3) que si le déterminant

$$\begin{vmatrix} y & \frac{dx}{dt} \\ -x & \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$$

est supposé différent de zéro, c'est-à-dire si $x^2 + y^2$ n'est pas constant. On ne peut donc s'en servir dans le cas où le mouvement a lieu sur un cercle.

Des remarques analogues pourraient être faites sur d'autres problèmes de Mécanique ; par exemple, si un point matériel est soumis à une force dérivant d'un potentiel et rencontrant $Oz$, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

avec la condition $y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y} = 0$. On ne peut remplacer les deux premières de ces équations par les intégrales des aires et des forces vives

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2U + h$$

que si $x^2 + y^2$ n'est pas constant ; on ne pourra donc étudier ainsi le cas particulier où le point se meut sur un cylindre de révolution ayant pour axe O $z$.