Nouvelles annales de mathématiques

A. Astor

Sur le nombre des périodes d'une fonction uniforme

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 227-232

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__227_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[D3g]

SUR LE NOMBRE DES PÉRIODES D'UNE FONCTION UNIFORME;

PAR M. A. ASTOR,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

On connaît cet important théorème de Jacobi qu'une fonction uniforme d'une variable z ne peut avoir deux périodes dont le rapport soit réel ni plus de deux périodes dont le rapport soit imaginaire. On démontre ce théorème en s'appuyant sur le lemme suivant, où il n'est question que de fonctions homogènes à coefficients réels :

Si l'on considère une fonction linéaire de deux variables ou deux fonctions linéaires de trois varia-

bles, on peut toujours trouver pour les variables des valeurs entières ne s'annulant pas en même temps et telles que, pour ces valeurs des variables, les fonctions considérées soient en valeur absolue inférieures à une quantité donnée quelconque, si petite qu'elle soit.

Ce lemme est un cas particulier de la proposition suivante, que nous allons démontrer :

Étant données $n-1$ fonctions linéaires de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut rendre séparément chaque fonction inférieure en valeur absolue à une quantité quelconque donnée par des systèmes de valeurs entières des variables ne s'annulant pas toutes en même temps.

La proposition est bien connue dans le cas de deux variables, et, au surplus, la méthode que nous allons employer la démontre implicitement dans ce cas. Supposons-la donc vraie pour $n-2$ fonctions au plus de $n-1$ variables; il suffit de montrer qu'elle est encore vraie pour $n-1$ fonctions de n variables.

Soient

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_{n-1} &= a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots + a_{n-1,n}x_n,
\end{aligned}$$

les $n-1$ fonctions linéaires; désignons, comme on le fait souvent, la valeur absolue d'une lettre par cette lettre placée entre parenthèses; nous voulons démontrer qu'on peut avoir, p variant de 1 à n

$$(X_p) < \eta,$$

pour des valeurs entières, non nulles en même temps, des variables, η étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra.

Considérons, à cet effet, la fonction quadratique

$$f = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{n-1}^2.$$

Il nous suffira de montrer qu'on peut avoir, pour une pareille substitution,

$$f < \eta^2.$$

Remarquant que f doit contenir les carrés de toutes les variables, sans quoi il n'en entrerait pas n dans les $n - 1$ fonctions X, nous pourrons décomposer f en carrés par la méthode de Lagrange sous la forme

$$f = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_{n-1}^2,$$

Y_1 contenant x_1 qui n'entre pas dans $Y_2, Y_3, \ldots, Y_{n-1}$, et tous les carrés étant positifs. Dès lors, $Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ forment un système de $n - 2$ fonctions linéaires au plus de $n - 1$ variables; et nous pouvons, d'après l'hypothèse, les rendre séparément aussi petites que nous voudrons pour des valeurs entières, non nulles en même temps, de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, et remarquons que, si quelques-unes de ces variables n'entraient pas dans Y_2, $Y_3, \ldots, Y_{n-1}$, auquel cas elles resteraient indéterminées, elles entreraient forcément dans Y_1.

Supposons donc, q variant de 2 à n,

$$(Y_q) < \frac{1}{N^2},$$

N étant un nombre entier tel, que l'on ait

$$\frac{1}{N} < \frac{\eta}{\sqrt{n-1}}.$$

Si nous considérons les substitutions correspondantes et si nous multiplions tous les nombres entiers qui la composent par un même entier k positif, mais du reste indéterminé, la substitution de ces nouveaux nombres donnera évidemment l'inégalité

$$(Y_q) < \frac{k}{N^2}.$$

D'autre part, Y_1 prend la forme $A_1 x_1 + A_2 k$, ou $A_1(x_1 + A k)$, en posant

$$\frac{A_2}{A_1} = A,$$

ce qu'on peut toujours faire, puisque A_1 n'est pas nul, et nous pouvons de plus le supposer positif.

Il suffit de démontrer que l'on peut avoir

$$(x_1 + A k) < \frac{1}{A_1} \frac{\eta}{\sqrt{n-1}}, \qquad \frac{k}{N^2} < \frac{\eta}{\sqrt{n-1}},$$

car alors, quel que soit p de 1 à $n-1$, on aura

$$Y_p^2 < \frac{\eta^2}{n-1},$$

et, par suite,

$$f > \eta^2.$$

La démonstration n'a d'intérêt que lorsque A est incommensurable; car, dans le cas contraire, on pourrait annuler Y_1. Développons alors (A) en fraction continue; cette dernière sera indéfinie, et nous aurons

$$(A) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}$$

Examinons d'abord le cas où a_2 serait supérieur à N. Écrivons alors, en désignant par la lettre ε affectée d'un indice, une quantité comprise entre -1 et $+1$

$$(A) = a_1 + \frac{\varepsilon_1}{a_2};$$

$\frac{Y_1}{A_1}$ devient

$$x_1 \pm k a_1 \pm \frac{k\varepsilon_1}{a_2};$$

si nous faisons $k = 1$, $x_1 = \mp a_1$, l'expression précédente se réduit à

$$\pm \frac{\varepsilon_1}{a_2},$$

et elle sera inférieure en valeur absolue à

$$\frac{1}{A_1} \frac{\eta}{\sqrt{n-1}},$$

pourvu que N soit suffisamment grand, puisque $a_2 > N$. Il suffirait même que a_2 fût dans un rapport fini avec N. Quant à $\frac{k}{N^2}$ il devient $\frac{1}{N^2}$ et l'on a déjà

$$\frac{1}{N} < \frac{\eta}{\sqrt{n-1}}.$$

Le cas précédent écarté, nous pouvons mettre (A) sous l'une des formes suivantes

$$a_1 + \frac{\varepsilon_1}{a_2}, \quad \frac{p_2}{a_2} + \frac{\varepsilon_2}{a_2 q_3}, \quad \frac{p_3}{q_3} + \frac{\varepsilon_3}{q_3 q_4}, \quad \ldots,$$
$$\frac{p_\alpha}{q_\alpha} + \frac{\varepsilon_\alpha}{q_\alpha q_{\alpha+1}}, \quad \ldots.$$

Remplaçant (A) par la dernière de ces expressions dans $x_1 + Ak$, nous obtenons

$$x_1 \pm k \frac{p_\alpha}{q_\alpha} \pm \frac{k \varepsilon_\alpha}{q_\alpha q_{\alpha+1}}.$$

Faisant $k = q_\alpha$, $x_1 = \mp p_\alpha$, cette quantité se réduit à

$$\frac{\varepsilon_\alpha}{q_{\alpha+1}}.$$

Or, $q_{\alpha+1} > q_\alpha$, et ces nombres croissent indéfiniment.

Il viendra donc un moment où, q_α étant inférieur à N, $q_{\alpha+1}$ lui sera supérieur, à moins que a_2 ne soit déjà plus grand que N, auquel cas la proposition est déjà démontrée; dès lors on aura

$$\frac{\varepsilon_\alpha}{q_{\alpha+1}} < \frac{1}{N}, \qquad \frac{k}{N^2} < \frac{1}{N},$$

et il suffira que $\frac{A_1}{N}$ soit inférieur à $\frac{\eta}{\sqrt{n-1}}$, puisque déjà $\frac{1}{N}$ lui est inférieur. La chose étant toujours possible, la proposition est démontrée dans toute sa généralité.

Comme conséquence on voit que toute fonction quadratique réelle et homogène, dont le hessien est nul, peut être rendue aussi petite que l'on veut pour des valeurs entières des variables.