NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FÉLIX KLEIN

Sur le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe (der Kreisel)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 218-222

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__218_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[R8cβ]

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS GRAVE DE RÉVOLUTION SUSPENDU PAR UN POINT DE SON AXE (DER KREISEL) [1];

PAR M. FÉLIX KLEIN

(Traduit de l'allemand par M. L. LAUGEL.)

La théorie des fonctions d'une variable complexe nous a depuis longtemps doté d'un système de formules particulièrement simple pour la représentation de la rotation d'un corps rigide autour d'un point fixe, système qui, autant que j'en ai connaissance, n'a pas encore été employé pour les applications de la Mécanique; il faut vraisemblablement croire que désormais l'on pourra en faire usage avec un avantage tout particulier.

Décrivons autour du point fixe O comme centre une sphère sur laquelle, à l'instar de Riemann, on interprétera une variable complexe ζ.

Les rotations autour de O sont alors simplement données par ces substitutions linéaires unimodulaires

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}, \tag{1}$$

où d'une part α et δ, et d'autre part β et $-\gamma$ sont imaginaires conjuguées (comparez par exemple mes *Leçons sur l'Icosaèdre*, p. 32). Dans le traitement d'un problème quelconque de rotation on est donc conduit à représenter les constantes en question α, β, γ, δ comme fonctions appropriées du temps t.

---

(1) Communication présentée à la Société Royale des Sciences de Göttingue, le 11 janvier 1896.

C'est ce que j'ai effectué pour le corps de révolution habituel (la toupie), c'est-à-dire le corps de révolution soumis aux lois de la pesanteur et fixé par un point de son axe.

Je désigne par $\zeta = \infty$ le pôle supérieur de la sphère décrite du point O comme centre dans l'espace fixe, par $Z = \infty$ la pointe (der Kreiselspitze); d'une manière générale Z représente la variable complexe sur la sphère congruente liée au corps grave de révolution. Le résultat est le suivant : α, β, γ, δ sont des fonctions elliptiques de deuxième espèce qui *au numérateur et au dénominateur renferment une seule fonction thêta.*

Comme le dénominateur est le même dans chacune des quatre expressions la courbe que nous tirons de (1) pour le mouvement de la pointe

$$\zeta = \frac{\alpha}{\gamma} \tag{2}$$

renferme également dans sa représentation un seul facteur thêta au numérateur et au dénominateur.

D'un autre côté, pour donner un nouvel exemple, on obtient pour le cône de la polhodie, outre $r = \text{const.}$,

$$p + iq = 2i\left(\beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt}\right), \tag{3}$$

expression qui renferme par conséquent deux facteurs thêta au numérateur et au dénominateur.

Il est bien intéressant d'examiner comment ces formules simples se vérifient partout indirectement sur les développements que l'on trouve dans la littérature du sujet, sans avoir été jusqu'ici présentées directement et sans que l'on ait songé à leur donner le premier rôle dans le traitement de ces questions. Ainsi, par exemple, au lieu de la courbe (2) tracée sur la sphère, on en a jusqu'ici toujours considéré la projection sur le plan horizontal; mais pour celle-ci nous trouvons

$$x + iy = 2\alpha\beta; \tag{4}$$

alors il se présente deux facteurs thêta au numérateur et au dénominateur, ce qui, vu (2), est une complication inutile.

NOTE. — *Vorlesungen über das Icosaeder und die Auflösung der Gleichungen von 5^{ten} Grade.* Felix Klein, Teubner, 1884, p. 32, § 2. — *Sur les transformations linéaires de $(x + iy)$ qui correspondent aux rotations autour du centre de la sphère.* (Résumé.)

L'équation de la sphère étant prise sous la forme (coordonnées rectangulaires)

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

on introduit la variable complexe $z = x + iy$ en la représentant, comme d'habitude, sur le plan des ξ, η, plan de l'équateur. Ce plan, à l'aide d'une projection stéréographique, sera représenté sur la surface de la sphère, de sorte que l'on a les formules

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}, \qquad x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

ou

$$\xi = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2},$$

$$\eta = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$\zeta = \frac{-1 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

On est alors conduit, par une suite de considérations et de formules que l'on trouvera dans le célèbre Ouvrage de M. Klein, à la formule suivante

$$(5)\quad e^{-\frac{i\alpha}{2}}\frac{z'(1+\zeta)+(\xi+i\eta)}{z'(1-\zeta)-(\xi+i\eta)}=e^{\frac{i\alpha}{2}}\frac{z(1+\zeta)+(\xi+i\eta)}{z(1-\zeta)-(\xi+i\eta)},$$

formule générale pour une rotation quelconque d'angle α.

Si l'on résout la formule (5) par rapport à z' il sera commode d'introduire les abréviations suivantes

$$\xi\sin\frac{\alpha}{2}=a,\qquad \eta\sin\frac{\alpha}{2}=b,\qquad \zeta\sin\frac{\alpha}{2}=c,\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=d;$$

il est clair qu'on a aussi

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1$$

et l'on obtient la formule très simple

$$(6)\qquad z'=\frac{(d+ic)z-(b-ia)}{(b+ia)z+(d-ic)},$$

formule qui a été donnée pour la première fois par Cayley : *Math. Annalen*, 1879 « Correspondence of homographies and rotations ». On voit aisément que cette formule revient à la formule (1) de la Note de M. Klein.

Remarquons que nous avons ainsi *deux* formules pour chaque rotation. En effet, la rotation reste inaltérée lorsque l'on augmente l'angle α de 2π; mais alors les quatre grandeurs a, b, c, d changent de signe. Cela tient à ce que le déterminant de la substitution (6) que j'écrirai

$$z'=\frac{Az+B}{Cz+D}$$

est égal à $AD-BC=a^2+b^2+c^2+d^2$, c'est-à-dire par conséquent $=1$, ce qui nous indique bien encore la double possibilité pour le choix des signes.

Remarquons encore que l'on a

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{A+D}{\sqrt{AD-BC}}.$$

Pour plus de détails il est indispensable de consulter Icosaeder.

Livres à consulter sur la rotation d'un corps grave de révolution :

LAGRANGE, *Mécanique analytique,* 3e édition, tome second.

JACOBI, *Œuvres complètes,* tome II.

HERMITE, *Applications des fonctions elliptiques,* Gauthier-Villars.

DARBOUX, *Notes au Cours de Mécanique de M. Despeyrous*, tome II, Hermann, 1886.

PUISEUX, *Note sur le mouvement d'un point matériel, etc.* (*Journal de Math.*, 1re série, tome VII).

HALPHEN, *Fonctions elliptiques,* tome II.

M. Klein en ce moment professe des leçons sur le sujet à l'Université de Göttingue; elles seront sans doute lithographiées prochainement, selon l'usage suivi depuis un certain nombre d'années.