NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. GOURSAT

Sur le théorème de Salmon

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 20-22

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__20_1>

[M'5h] SUR LE THÉORÈME DE SALMON;

PAR M. E. GOURSAT,
Maître de Conférences à l'École Normale supérieure

1. Je rappellerai d'abord quelques propriétés bien connues des courbes du troisième ordre.

I. *Toutes les courbes du troisième ordre qui passent par huit points fixes vont passer par un neuvième point fixe* (SALMON, *Courbes planes*, p. 24).

De ce théorème on déduit, comme cas particulier, que, si A, B, C sont les points d'intersection d'une

(¹) *Voir* M. GOURSAT, *Équations aux dérivées partielles du premier ordre*, où sont exposées ces théories. Paris, Hermann.

cubique avec une droite Δ, A', B', C' les points d'intersection de la même cubique avec une seconde droite Δ', les trois droites AA', BB', CC' rencontrent respectivement la cubique en trois points A'', B'', C'', qui sont aussi en ligne droite. En effet, parmi les cubiques passant par les huit points A, B, C, A', B', C', A'', B'', on a, d'une part, le système des trois droites Δ, Δ', $A''B''$, d'autre part le système des trois droites $AA'A''$, $BB'B''$, CC'. Ces deux cubiques ont un neuvième point commun, qui est le point d'intersection des deux droites CC', $A''B''$; il coïncide donc avec le point C''.

Si la droite Δ' vient se confondre avec la droite Δ, les points A', B', C' viennent respectivement aux points A, B, C et les points A'', B'', C'' deviennent les tangentiels des points A, B, C (on appelle *tangentiel* d'un point A de la cubique le second point de rencontre de la tangente en A avec cette courbe). On a donc la proposition suivante :

II. *Les tangentiels de trois points en ligne droite sont eux-mêmes en ligne droite.*

2. Cela posé, soient A et A' deux points quelconques d'une courbe du troisième ordre, n'ayant pas de point double; par chacun de ces points on peut mener quatre tangentes à la cubique, non compris celle qui a son point de contact au point lui-même. Soient P, Q, R, S les points de contact des tangentes issues du point A, P', Q', R', S' les points de contact des tangentes issues du point A'; nous voulons démontrer que *le rapport anharmonique des quatre droites* AP, AQ, AR, AS *est le même que celui des quatre droites* $A'P'$, $A'Q'$, $A'R'$, $A'S'$, *prises dans un certain ordre.*

La droite AA' rencontre la cubique en un troisième point A''; soit B le point de contact d'une tangente issue du point A''. La droite PB rencontre la cubique en un point P_1 et, d'après la proposition II, les tangentiels des trois points P, B, P_1 doivent être en ligne droite; le point P_1 est donc un des quatre points P', Q', R', S'. On peut évidemment supposer que c'est le point P', puisque cela revient à un changement de notation; nous appellerons de même R', S', T' les points de rencontre avec la cubique des droites BQ, BR, BS respectivement.

Considérons maintenant une sécante quelconque AMN, issue du point A, qui rencontre la cubique en deux autres points M et N; la droite BM rencontre la cubique en un troisième point M' et la droite BN en un troisième point N'. Il résulte de la proposition générale rappelée plus haut que les trois points A', M', N' sont en ligne droite. Il suffit de supposer que la droite Δ est la droite AMN, et que la droite Δ' est la droite $A''B$, qui a deux de ses points de rencontre avec la cubique confondus au point B. A toute sécante issue du point A il correspond donc une sécante, et une seule, issue du point A', et réciproquement; par suite, il y a une relation homographique entre les coefficients angulaires de ces deux droites. Or, lorsque la sécante issue du point A devient tangente, il en est de même de la sécante issue du point A'. Le rapport anharmonique des quatre tangentes issues du point A' est donc égal au rapport anharmonique des quatre tangentes issues du point A.