Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 196-199

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__196_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1668.

(1894, p. 3*).

Étant donnée une parabole de sommet O *et de foyer* F, *on trace une corde focale* AB. *Le cercle circonscrit au triangle* OAB *rencontre l'axe de la parabole en un point* P, *tel que* FP = AB. (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Soit $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$ l'équation polaire de la parabole.

On aura $FA = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$; $FB = \dfrac{p}{1 - \cos(180 + \varphi)} = \dfrac{p}{1 + \cos\varphi}$.

Donc $AB = FA + FB = \frac{2p}{\sin^2\varphi}$, $FA.FB = \frac{p^2}{\sin^2\varphi}$.

Or

$$FO.FP = FA.FB,$$

d'où

$$FP = \frac{p^2}{\sin^2\varphi} : \frac{p}{2} = \frac{2p}{\sin^2\varphi}, \quad FP = AB.$$

On nous a adressé aussi la solution suivante :

On sait que *quelle que soit la corde focale on a*

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \text{const.}$$

Si l'on prend l'axe comme corde, on voit que la constante est $\frac{1}{FO}$; on a alors $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{1}{FO}$,

d'où $\quad (FA + FB)\,FO = FA \times FB, \qquad$ donc, etc.

Question 1669.

(1894, p. 3*).

Par le foyer F *d'une parabole, on mène une corde* AB *et l'on décrit sur* AB *comme diamètre une circonférence* Σ *qui rencontre la parabole en deux autres points* C *et* D. *On porte sur* FC, *du côté opposé à* C, *une longueur* $FD' = FD$ *et sur* FD, *du côté opposé à* D, *une longueur* $FC' = FC$. *Montrer que les points* C' *et* D' *sont situés sur la circonférence* Σ. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Une circonférence quelconque de centre L a pour équation polaire

$$\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \alpha) + a^2 - r^2 = 0,$$

a et α étant les coordonnées polaires du centre L.

En choisissant le foyer F comme origine et l'axe de la parabole comme axe polaire, la circonférence AB aura pour équations

$$\rho^2 - \rho\frac{2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cos(\varphi - \alpha) + \frac{p^2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} - \frac{p^2}{\sin^4\alpha} = 0,$$

ou

$$\rho^2 - \rho\frac{2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cos(\varphi - \alpha) - \frac{p^2}{\sin^2\alpha} = 0,$$

car

$$AB = \frac{2p}{\sin^2\alpha} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{FA - FB}{2} = \frac{p\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \ (^1).$$

Éliminons φ entre l'équation du cercle et l'équation de la parabole $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$.

De cette dernière, on déduit

$$\cos\varphi = \frac{\rho - p}{p} \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = \sqrt{\frac{\rho^2 - (\rho - p)^2}{\rho^2}}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation du cercle développée, elle devient

$$\rho^2\sin^2\alpha - 2\rho p\cos\alpha(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) - p^2 = 0,$$

$$\rho^2\sin^2\alpha - 2\rho p\cos^2\alpha\,\frac{\rho - p}{\rho} - 2\rho p\cos\alpha\sin\alpha\sqrt{\frac{\rho^2-(\rho-p)^2}{\rho^2}} - p^2 = 0;$$

ou

$$\rho^2\sin^2\alpha - 2p\cos^2\alpha(\rho - p) - p^2 = p\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\rho^2 - (\rho - p)^2}.$$

Cette équation, élevée au carré, fournit

$$\rho^4\sin^4\alpha + \rho^3(\ ) + \ldots + p^4 = 0,$$

d'où

$$FA.FB.FC.FD = \frac{p^4}{\sin^4\alpha}.$$

Or

$$FA.FB = \frac{p^2}{\sin^2\varphi}.$$

Donc

$$FC.FD = FA.FB,$$

et, par conséquent,

$$FA.FB = FC.FC' = FD.FD'.$$

Question 1670.

(1894, p. 3*.)

Étant donnés trois points A, B, C *sur une courbe quelconque, soient* A' *le pôle de* BC, B' *le pôle de* AC, *et* C' *le*

---

(1) Voir la solution de la question 1668 (p. 196 ci-dessus)

pôle de AB. *Lorsque les points* A, B, C *se réunissent en un seul* A, *on a*

$$\lim\left(\frac{A'B'.A'C'.B'C'}{\text{surface } A'B'C'}\right) = R,$$

R *étant le rayon du cercle osculateur en* A.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. G. Tzitzéica.

Soit R′ le rayon du cercle circonscrit à A′B′C′. On a

$$A'B' + B'C' + C'A' = 4R' + \text{surface } A'B'C'.$$

Il reste à montrer que

$$(1) \qquad \lim R' = \frac{R}{4}.$$

Je considère les coniques qui passent par A, B, C, c'est-à-dire qui ont à la limite avec la courbe donnée un contact du second ordre.

Il est évident qu'elles sont inscrites dans le triangle infinitésimal A′B′C′. Spécialement, les foyers des paraboles circonscrites à ABC se trouvent sur le cercle circonscrit à A′B′C′. Alors la limite de R′ est le rayon du cercle, lieu des foyers des paraboles ayant en A un contact du second ordre avec la courbe considérée. Or, le rayon de ce dernier cercle est, comme on sait [1], $\frac{R}{4}$. L'égalité (1) est par conséquent démontrée.