Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 145-151

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__145_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 1638 et 1639.

(1892, p. 30*, 31*.)

1638. *On considère un cercle fixe C et un faisceau de cardioïdes ayant toutes même axe de symétrie et même point de rebroussement O. La somme des inverses des rayons vecteurs joignant le point O aux points d'intersection du cercle avec une des cardioïdes est constante.*

1639. *On considère un cardioïde et une point fixe P dans son plan. Un cercle quelconque ayant son centre en P rencontre la cardioïde en huit points. La somme des longueurs des rayons vecteurs joignant ces huit points au point de rebroussement de la cardioïde est constante.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Ernest Foucart.

Soient

$$\rho = R(1 + \cos\omega),$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + R'^2 = 0$$

les équations d'une cardioïde et d'un cercle C de centre $P(a, b)$. On a

$$x = \rho \cos\omega = \rho \frac{\rho - R}{R}, \qquad y = \rho \sin\omega = \rho \frac{\sqrt{2\rho R - \rho^2}}{R}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation de la circonférence, on a, pour déterminer les points communs aux deux courbes autres que les points cycliques, l'équation

$$\rho^2 - 2a\rho \frac{\rho - R}{R} - 2b\rho \frac{\sqrt{2\rho R - \rho^2}}{R} + R'^2 = 0.$$

Développant et ordonnant par rapport à ρ, il vient

$$\begin{aligned} &[(R - 2a)^2 + 4b^2]\rho^4 + 4R[a(R - 2a) - 2b^2]\rho^3 \\ &\quad + 2R[2a^2 R + R'^2(R - 2a)]\rho^2 + 4aR'^2R^2\rho + R^2R'^2 = 0; \end{aligned}$$

la considération de cette équation donne la proposition du numéro 1638 ou celle du numéro 1639, suivant qu'on y regarde R ou R' comme variable.

Il eût été préférable, dans la question 1639, de ne considérer que les quatre points communs autres que les points cycliques.

Question 1641.

(1892, p. 31*.)

Si un cercle a pour centre un point d'une hyperbole équilatère et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre de l'hyperbole, il coupe cette courbe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral. (LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. ERNEST FOUCART.

Soient

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0$$

l'équation de l'hyperbole et $a \operatorname{séc}\varphi$, $a \operatorname{tang}\varphi$ les coordonnées du point considéré. Transportons en ce point les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes ; l'hyperbole et le cercle ont alors pour équations

$$x^2 - y^2 + 2ax \operatorname{séc}\varphi - 2ay \operatorname{tang}\varphi = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 4a^2(1 + \sin^2\varphi)\operatorname{séc}^2\varphi = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points communs à ces deux courbes est

$$m^4 + 2\sin\varphi\, m^3 - 3(1+\sin^2\varphi)m^2 + 2\sin\varphi\, m + \sin^2\varphi = 0,$$

et, supprimant la droite qui passe par le centre de l'hyperbole,

$$m^3 + 3\sin\varphi\, m^2 - 3m - \sin\varphi = 0.$$

Cette équation définit les coefficients angulaires de droites faisant entre elles des angles de 60°, car si l'on pose

$$\tan g\,\omega = -\sin\varphi,$$

et

$$\tan g\frac{\omega}{3} = m,$$

on a la relation connue

$$-\sin\varphi = \frac{3m - m^3}{1 - 3m^2},$$

équivalente à l'équation écrite.

Question 1644.

(1892, p. 31*.)

Si α *est l'angle sous lequel une normale à une parabole coupe l'axe de cette parabole,* β *l'angle sous lequel elle coupe la courbe en son second point de rencontre avec celle-ci, on a* $\tan g\,\alpha = 2\tan g\,\beta$. (On demande une solution géométrique.) (D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. ERNEST FOUCART.

Soient A, le pied de la normale AB; C, le pôle de AB; F, le milieu de AB; D et E, les points de rencontre de l'axe avec AB et AC. On a

$$AE = AD \tan g\,\alpha,$$
$$AC = AB \tan g\,\beta,$$

d'où, en tenant compte du parallélisme de FC et DE,

$$\frac{AD \tan g\,\alpha}{AB \tan g\,\beta} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AF},$$

et comme

$$AB = 2.AF,$$
$$\tan g\,\alpha = 2\tan g\,\beta.$$

Question 1645.

(1892, p. 32*.)

On considère une lemniscate de Bernoulli (L) *dont le point double est en* O *et l'un des sommets en* A.

On considère aussi l'hyperbole équilatère (H) *ayant un de ses sommets au milieu de* OA *et pour asymptotes les tangentes au point double de la lemniscate.*

Montrer que le cercle qui a son centre en un point quelconque C *de* (H) *et qui passe par* O *est tangent à la lemniscate* (L) *en un point* K *tel que* OA *est bissectrice des droites* OC *et* OK. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Ernest Foucart.

Soient

$$\text{(L)} \qquad (x^2+y^2)^2-4a^2(x^2-y^2)=0,$$

$$x^2+y^2-\frac{2ax}{\cos\varphi}-2ay\operatorname{tang}\varphi=0,$$

les équations de la lemniscate et du cercle de centre

$$C\left(\frac{a}{\cos\varphi},\ a\operatorname{tang}\varphi\right).$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points communs à ces deux courbes, autres que l'origine et les points cycliques, s'obtient en éliminant la variable d'homogénéité entre ces deux équations, ce qui donne

$$m^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+2m\sin\varphi+(1-\cos^2\varphi)=0,$$

ou

$$(m+\sin\varphi)^2=0.$$

Cette équation montre que les deux courbes sont tangentes en un point K, tel que OK ait pour coefficient angulaire $-\sin\varphi$: or $\sin\varphi$ est justement le coefficient angulaire de OC, donc OC et OK sont symétriques par rapport à Ox.

Question 1658.

(1894, p. 1*.)

On donne un triangle abc. Du sommet a, on abaisse sur bc la perpendiculaire aa'; de même, de b on abaisse la *perpendiculaire bb'. Du point i, centre du cercle inscrit au triangle $a'cb'$, on mène des parallèles à ac et bc.*

Ces droites rencontrent ces côtés aux points $\alpha\beta$. Démontrer que la circonférence qui touche en α et β les côtés cb et ca est tangente au cercle des neuf points du triangle donné? (MANNHEIM).

SOLUTION

par M. A. DROZ-FARNY.

Dans le losange $i\beta c\alpha$, on a

$$c\beta = \frac{ci}{2\cos\frac{c}{2}}.$$

Or le triangle $a'cb'$ est semblable au triangle donné, le rapport de similitude étant $\cos c$. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle acb. On sait que

$$c\mathrm{I} = \frac{p-c}{\cos\frac{c}{2}},$$

et, par conséquent,

$$c\beta = \frac{c\mathrm{I}\cos c}{2\cos\frac{c}{2}} = \frac{(p-c)\cos c}{2\cos^2\frac{c}{2}} = \frac{ab}{2p}\cos c.$$

Soit m le point milieu de ac. La puissance du sommet c par rapport au cercle des neuf points sera

$$cb'.cm = \frac{ab}{2}\cos c.$$

Construisons sur ac un point β' pour lequel $c\beta.c\beta' = cb'.cm$. On aura

$$c\beta' = p.$$

Si donc on transforme la figure par rayons vecteurs réciproques, par rapport au point c comme centre et $r^2 = cb'.cm$ comme module d'inversion : 1° le cercle des neuf points se transforme en lui-même; 2° le cercle $\alpha\beta$ a pour inverse un nouveau cercle $\alpha'\beta'$ tangent aux côtés ac et bc à une distance $c\alpha' = c\beta' = p$.

Or ce cercle n'est rien autre que le cercle ex-inscrit au triangle abc dans l'angle c. Ce dernier étant tangent au cercle des neuf points, il en sera de même du cercle $\alpha\beta$ et les points de contact sont en ligne droite avec le sommet c.

Question 1659.

(1894, p. 1*)

Étant donnée une conique (C), *on considère le triangle formé par les tangentes menées d'un point* P *à la conique et la polaire de ce point par rapport à* (C). *Montrer que l'orthocentre de ce triangle est sur la polaire du point* P *par rapport au cercle orthoptique de la conique* (C).

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Soient PA et PB les tangentes à la conique (C). PP′, AA′, BB′ les hauteurs du triangle PAB, H son orthocentre, M le milieu de AB et O le centre de (C). La droite A′B′ coupe AB en α et αH rencontre PM en a. On sait que PM passe par le centre O. La circonférence décrite sur AB comme diamètre, passant par A′ et B′, il en résulte que αH est polaire de P par rapport à cete circonférence et que, par conséquent, angle $\mathrm{P}a\alpha = 90°$. Le quadrilatère $\mathrm{P}a\mathrm{P}'\alpha$ est donc inscriptible et, comme P′ et α sont conjugués harmoniques par rapport à A et B, cette circonférence est circonscrite au triangle $\mathrm{PP}'\alpha$ conjugué par rapport à (C). On a donc, d'après le théorème de Faure,

$$\mathrm{O}a.\mathrm{OP} = a^2 + b^2,$$

ce qui prouve que $a\mathrm{H}\alpha$ est une droite, et que cette droite est la polaire de P par rapport au cercle orthoptique.

Question 1665.

(1894, p. 2*)

Si trois cercles sont inscrits à un triangle, les quatrièmes tangentes communes qu'ils admettent, pris deux à deux, forment un triangle homologique du premier.

(E. DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soient O, O_a, O_b, O_e les quatre cercles inscrits. La quatrième tangente commune aux cercles O et O_a coupe le côté $BC = a$ au pied de la bissectrice intérieure de l'angle A; de même la quatrième tangente commune aux cercles O_b et O_c coupe a au pied de la bissectrice extérieure de l'angle A.

Mais on sait que les six pieds des bissectrices intérieures et extérieures des angles du triangle sont par trois sur quatre droites. Les trois côtés d'un des quatre triangles des tangentes coupent donc les côtés correspondants du triangle ABC suivant trois points en ligne droite; d'où le théorème.