Nouvelles annales de mathématiques

Licence ès sciences mathématiques, session de novembre 1895. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 130-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__130_0>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1895. — COMPOSITIONS.

Marseille.

ANALYSE. — *En appelant a et b deux fonctions uniformes de z, démontrer que la surface représentée par les équations*

$$x = a\cos\varphi,$$
$$y = b\sin\varphi,$$

peut être engendrée par le déplacement convenable d'une ellipse variable avec z.

Déterminer le volume compris entre la surface et les deux plans dont les équations sont

$$z = z_0 \quad \text{et} \quad z = z_0 + h,$$

en supposant le produit ab constant.

Former ensuite, dans le cas général, l'équation différentielle en z et φ qui donne les lignes asymptotiques de la surface.

Intégrer enfin cette équation différentielle dans le cas où l'on a

$$a = \mathrm{K}b, \qquad \mathrm{K} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{b}\frac{d^2 b}{dz^2} = \frac{1}{z^2}.$$

NOTA. — *Les axes de coordonnées seront supposés rectangulaires.*

Une tranche du volume est comprise entre deux ellipses de même aire, situées dans des plans parallèles. Soit A l'aire d'une de ces ellipses ; l'élément de volume est $\mathrm{A}\,dh$, et le volume entier $\mathrm{A}h$.

Les lignes asymptotiques sont déterminées par les équations $d^2\varphi = 0$, $d^2z = 0$, $pd^2x + qd^2y = 0$, quand z et φ sont les variables indépendantes. On trouve ainsi l'équation générale

$$\begin{aligned}&(a''b\cos^2\varphi + ab''\sin^2\varphi)dz^2\\&\quad - 2(a'b - ab')\sin\varphi\cos\varphi\, dz\, d\varphi - ab\, d\varphi^2 = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a''}{a}\cos^2\varphi + \frac{b''}{b}\sin^2\varphi\right)dz^2\\&\quad - 2\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)\sin\varphi\cos\varphi\, dz\, d\varphi - d\varphi^2 = 0,\end{aligned}$$

en appelant a', b', a'', b'' les dérivées de a et b par rapport à z.

Dans le cas particulier proposé pour l'intégration, l'équation précédente se réduit à

$$\frac{b''}{b}dz^2 - d\varphi^2 = 0,$$

ou à

$$\frac{dz^2}{z^2} - d\varphi^2 = 0.$$

Il est facile d'achever.

Dijon.

Analyse. — I. *Intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, dépourvues ou pourvues de seconds membres.*

II. *Trouver, en coordonnées rectangulaires, une ligne plane pour laquelle l'aire limitée par elle, par les axes des coordonnées et par l'ordonnée du point m mobile sur cette ligne, reste proportionnelle au carré de la distance du même point m à l'origine.*

En appelant x l'abscisse du point m, y son ordonnée à considérer comme fonction de x, et k un coefficient constant dont la valeur dépend de la proportionnalité à réaliser d'après l'énoncé, l'équation de ce problème est

$$\int_0^x y\,dx = \frac{1}{2k}(x^2+y^2),$$

dont la différentiation conduit à l'équation différentielle homogène

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky-x}{y}.$$

Après l'intégration de cette dernière, la valeur de la constante arbitraire se détermine par la condition initiale $y = 0$ pour $x = 0$, dont la nécessité est évidente.

Mécanique. — I. *Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, la réaction du point fixe étant la seule force extérieure agissant sur lui.*

II. Question. — *Un fil homogène pesant, attaché à deux points fixes situés à la même hauteur, affecte la forme d'un arc de cycloïde, la tangente au sommet étant horizontale. On demande quelle doit être la loi de la section.*

La section en un point doit être inversement proportionnelle au cube du cosinus de l'angle de la tangente en ce point avec la tangente au sommet. On voit que les deux points fixes ne peuvent être les points de rebroussement de la cycloïde, ce qui est un cas particulier de la proposition plus générale que la tangente en une extrémité fixe d'un fil pesant ne peut être verticale.

Épreuve pratique. — *Une surface de révolution a pour axe une droite verticale dont le pied sur le plan horizontal est à* $0^{m},02$ *en avant de la ligne de terre;*

elle est engendrée par la rotation d'une circonférence de $0^m,025$ *de rayon, située dans le plan vertical, dont le centre placé à gauche de la projection verticale de l'axe, au-dessus de la ligne de terre, est séparé de ces deux droites par des distances toutes deux égales à* $0^m,04$. *Construire le plan tangent à cette surface en un quelconque de ses points, ainsi que son contour apparent sur le plan vertical.*

Paris.

ANALYSE. — 1° *Intégrer l'équation*

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^2.$$

Cette équation, étant une équation de Bernoulli, devient linéaire quand on prend pour fonction inconnue l'inverse de y. On trouve ainsi pour son intégrale générale

$$y = \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\log(x+\sqrt{1+x^2}) - x\sqrt{1+x^2} + C},$$

C étant une constante arbitraire.

2° *Trouver les lignes asymptotiques du conoïde qui a pour plan directeur le plan des* xy, *pour directrice l'axe des* z *et qui est circonscrit à la sphère*

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

On sait que les asymptotiques non rectilignes du conoïde $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ont pour équation finie

$$x^{-2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const}.$$

Pour déterminer φ, on pose $y = xZ$, Z étant la fonction inverse de φ, et l'on écrit que cette droite coupe la sphère en deux points confondus, ce qui donne $x^2(1+Z^2)=1$. L'équation du conoïde est donc

$$z^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=1,\qquad z=\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

D'après cela, l'équation

$$\frac{y}{(\lambda^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\text{const}$$

représente les asymptotiques cherchées, qui sont algébriques.

Dynamique. — *Une tige rectiligne pesante* OA, *non homogène, d'épaisseur infiniment petite, est mobile autour d'une de ses extrémités* O *supposée fixe. Trouver le mouvement de cette tige, supposée placée dans des conditions initiales quelconques.*

On prendra pour axes fixes la verticale descendante Oz *et deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy *dans un plan horizontal. On appellera* θ *l'angle* zOA *et* φ *l'angle* zOA *avec le plan* zOx.

Désignons par M la masse de la barre, par MK^2 son moment d'inertie par rapport au point O, par l la distance de son centre de gravité au point O. Le théorème des forces vives donne

$$(1)\qquad \varphi'^2\sin^2\theta+\theta'^2=\frac{2lg}{k^2}\cos\theta=h,\qquad (h=\text{const.}).$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Oz donne une seconde intégrale

$$(2)\qquad \varphi'\sin^2\theta=\text{const.}=C.$$

Éliminant φ' on aura, pour déterminer l'inconnue $u = \cos\theta$, à intégrer la différentielle

$$dt = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(\frac{2lg}{k^2}u+h\right)-C^2}}.$$

On tirera ensuite φ' de l'intégrale (2). Même expression de n que pour le pendule sphérique; même discussion.

Cinématique. — *Les côtés* AB *et* AC *du quadrilatère articulé* ABCD *sont égaux, ainsi que les côtés* DB *et* DC. *On fixe le côté* AB *et l'on considère le mouvement de la bielle* CD : *ce mouvement peut être obtenu par le roulement d'une courbe liée à* CD *sur une courbe fixe.*

Déterminer ces deux courbes. Démontrer que la manivelle AC *fait deux tours pendant que la manivelle* BD *en fait un* (1).

Les courbes cherchées sont les lieux du centre instantané I dans le plan fixe et dans le plan mobile. Ce point I est à l'intersection des côtés CA et DB prolongés.

Soient a la longueur des côtés issus de A et d celle des côtés issus de D. On prend dans le plan fixe pour pôle B, pour axe polaire BA; dans le plan mobile pour pôle D, pour axe polaire DC; les coordonnées de I étant r, θ dans le premier système, r_1, θ_1 dans le second, la propriété de la diagonale AD d'être bissectrice des deux angles en A et en D, donne les relations

$$\frac{a}{p} = \frac{d+r}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}, \qquad \frac{a}{d} = \frac{r_1-a}{\sqrt{a^2+r_1^2-ar_1\cos\theta_1}},$$

(1) L'énoncé devrait ajouter : *si* AC *est plus petite que* BD.

qu'on peut écrire

$$r = \frac{2ad}{d^2 - a^2}(a + d\cos\theta), \qquad r_1 = \frac{2ad}{d^2 - a^2}(d - a\cos\theta_1).$$

Les deux courbes cherchées sont donc deux limaçons de Pascal.

Si l'on suppose $d > a$, le point D décrit une circonférence qui entoure le point A; donc quand la manivelle AD fait un tour complet, il en est de même de la droite AD; l'angle DAB augmente de 360°; l'angle CAB étant double du précédent, son côté AC fait deux tours.

Calcul astronomique. — *En un lieu de colatitude λ, on observe le temps sidéral du passage d'une étoile d'ascension droite* A *et de distance polaire* P, *au fil vertical de la lunette d'un théodolite. La lecture du cercle azimutal est* L.

On pointe ensuite la lunette sur une mire terrestre; soit L' *la lecture correspondante. On demande de déterminer l'azimut absolu de la mire.*

On prendra

$$\lambda = 41^\circ\ 9'48'',0; \qquad t = 5^h20^m59^s,5; \qquad L = 120^\circ\ 8'56'',4;$$
$$P = 50^\circ45'24'',2; \qquad A = 8^h33^m45^s,3; \qquad L' = 155^\circ51'\ 4'',5.$$

Les lectures croissent de l'est à l'ouest par le sud.

Lyon.

Analyse. — I. *On prend sur une surface les lignes de courbure pour lignes coordonnées curvilignes. Le ds^2 devient $ds^2 = E(u, v)du^2 + G(u, v)dv^2$. Exprimer en un point le produit des rayons de courbure principaux.*

II. *Intégrer les équations aux dérivées partielles*

$$F(z - px - qy - pq) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(px + py + pq) = 0,$$

F *fonction quelconque.*

MÉCANIQUE. — I. *Établir la relation entre la force vive totale d'un système, la force vive dans le mouvement relatif par rapport au centre de gravité et la force vive du centre de gravité, etc.*

II. *Mouvement d'un point pesant sur une circonférence qui tourne uniformément autour d'un diamètre vertical.*

Cas particulier où, à l'origine des temps, le point est dans la situation de repos relatif à l'extrémité du rayon horizontal.

Rennes.

ANALYSE. — I. *Trouver l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que leur plan tangent en chaque point* (x, y, z) *détermine sur l'axe* OZ *et à partir de l'origine une longueur qui ne dépend que du rapport* $\frac{y}{x}$.

Transformer l'équation du second ordre obtenue, par la substitution

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{y}{x};$$

en déduire son intégrale générale.

On intégrera également cette équation en partant de l'intégrale intermédiaire immédiatement fournie par l'énoncé.

II. *Étude de l'intégrale*

$$\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2}\, dz,$$

prise le long du contour formé de deux demi-circonférences de rayons

$$\text{R} \quad \textit{et} \quad r$$

ayant l'origine pour centre commun et reliées par les *portions de l'axe réel qu'elles interceptent entre elles.*

On supposera a et b réels et positifs.

En faisant tendre R *vers l'infini et r vers zéro, on déduira la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2}\, dx$$

(α *et* β *réels*).

La première question concerne *les surfaces réglées qui admettent l'axe des z comme directrice*

Quant à l'intégrale réelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2}\, dx,$$

qui dépend de la seconde question, on peut ainsi définir son mode de détermination : soit ω une quantité positive que l'on choisira égale à la plus petite des deux quantités positives

$$|\alpha| \quad \text{et} \quad |\beta|,$$

soit enfin $\varepsilon = \pm 1$, choisi de même signe que le produit $\alpha\beta$; l'intégrale précédente aura pour valeur

$$\pi . \omega . \varepsilon .$$

Mécanique. — *Déterminer et étudier les formes d'équilibre d'un fil homogène, inextensible, dont les points sont sollicités par une force émanant d'un centre fixe et inversement proportionnelle au carré de la distance.*

Former le système des équations propres à fournir les constantes arbitraires lorsqu'on donne la longueur du fil *et* les positions de ses deux extrémités.

La courbe cherchée, *toujours rectifiable,* se résout en deux variétés ; l'une de ces variétés est une transformée d'hyperbole qu'on obtient en faisant tourner les rayons vecteurs issus d'*un* foyer, de manière que l'angle d'un rayon avec l'axe focal de l'hyperbole soit amplifié dans un rapport constant K ; la longueur du rayon vecteur est, bien entendu, conservée.

Le lieu de l'extrémité du nouveau rayon vecteur est la courbe cherchée.

Le rapport constant K est lié très simplement à l'*excentricité* de l'hyperbole.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur la Terre, regardée comme sphérique, on demande la distance kilométrique des deux points* A *et* B, *déterminés par leurs coordonnées géographiques :*

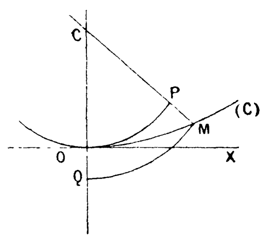
A	*Latitude*	$\varphi =$	$59°.56'.30''$
	Longitude	$L =$	$27.58.13$
B	*Latitude*	$\varphi' = -$	$33.\ 1.55$
	Longitude	$L' =$	$286.\ 2.38$

Lille.

ANALYSE. — 1° Question de cours. — *Intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.*

Application aux équations des cônes, des cylindres et des surfaces de révolution.

2° Problème. — *Une courbe plane* (C) *est tangente*



en O *à une droite* Ox. C *étant le point où la normale en* O *rencontre la normale en un point quelconque* M, *on décrit du point* C *deux arcs de cercle* OP, MQ, *limités à ces deux normales.*

Déterminer la courbe par la condition que les trois arcs OM, OP, MQ *vérifient la relation linéaire*

$$a.\mathrm{OP} + b.\mathrm{MQ} = \mathrm{OM}.$$

L'équation générale des tangentes à (C) *étant*

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = f(\alpha),$$

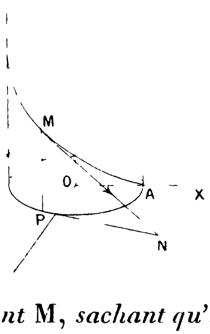
on formera l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $f(\alpha)$; *on achèvera l'intégration dans le cas où* $a = b = \frac{1}{2}$.

Mécanique. — Première question. — *Etendre le théorème des forces vives, le théorème des moments des quantités de mouvement, et, en particulier, celui des aires au cas du mouvement relatif d'un système autour de son centre de gravité.*

Deuxième question. — *Un point matériel non pesant* M, *de masse* m, *est assujetti à se mouvoir sur l'hélice circulaire*

$$x = a\cos u, \qquad y = a\sin u, \qquad z = au\cot i,$$

que l'on suppose dépolie. On demande d'étudier le



mouvement du point M, *sachant qu'il est soumis à une force dirigée vers le point* N *où la tangente en* M *à* *l'hélice rencontre le plan xOy et égale à*

$$\frac{\mathrm{MN}}{mae^{a}}.$$

On tiendra compte du frottement. A l'instant initial le mobile est en A *dans le plan xOy et sa vitesse est v_0.*

Astronomie. — *En un lieu de latitude connue λ, on a mesuré le temps sidéral* T *qui s'écoule entre les deux passages d'une même étoile connue (α, δ) dans un plan vertical déterminé. Calculer les heures sidérales de ces deux passages.*

Application :

$$\lambda = 50^\circ 38' 44'',0 \text{ (B)},$$
$$T = 1^h 14^m 46^s,$$
$$\alpha = 10^h 57^m 14^s,97,$$
$$\delta = 62^\circ 19' 3'',5 \text{ (B)}.$$