P. APPELL

Quelques exemples de séries doublement périodiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 126-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__126_1>

[F2]

QUELQUES EXEMPLES DE SÉRIES DOUBLEMENT PÉRIODIQUES;

PAR M. P. APPELL.

1. On sait qu'on nomme *fonction doublement périodique* une fonction uniforme $f(x)$ vérifiant deux relations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x+2K) = f(x) \\ f(x+2iK') = f(x). \end{cases}$$

Les constantes $2K$ et $2iK'$ sont les deux périodes.

Lorsque la fonction doublement périodique n'admet, à distance finie, d'autres singularités que des *pôles,* on dit qu'elle est une *fonction elliptique.*

(1) Comparer BIEHLER, *Journal de Crelle*, t. 87, p. 350, et LAGUERRE, *Journal de Crelle*, t. 89, p. 339.

Nous nous proposons ici d'indiquer quelques séries représentant des fonctions doublement périodiques. Pour cela, considérons la fonction $\Theta(x)$ de Jacobi, définie comme il suit :

Posons

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

où le module de q est supposé moindre que l'unité : la fonction Θ est définie par la série

$$(2) \qquad \Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi x i}{K}},$$

ou encore,

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - \ldots$$

Cette fonction satisfait aux deux relations suivantes, faciles à vérifier à l'aide du développement (2)

$$(3) \qquad \begin{cases} \Theta(x+2K) = \Theta(x) \\ \Theta(x+2iK') = -\dfrac{1}{q} e^{-\frac{\pi x i}{K}} \Theta(x). \end{cases}$$

On conclut de la seconde relation n fois répétée

$$(4) \qquad \Theta(x+2niK') = \frac{(-1)^n}{q^{n^2}} e^{-\frac{n\pi x i}{K}} \Theta(x),$$

où n peut aussi être pris négatif.

2. Ceci posé, soit p un *entier positif* fixe ; considérons la fonction définie par la série

$$(5) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\Theta^p(x+2niK')},$$

où la fonction Θ du dénominateur est élevée à la puissance p. Si cette série est convergente, il est évident qu'elle définit une fonction doublement périodique admettant les deux périodes $2K$ et $2iK'$. En effet, chaque terme de la série admet la période $2K$, et, quand on change x en $x + 2iK'$, chaque terme ne fait que reculer d'un rang, et la somme de la série ne change pas. Or la convergence résulte immédiatement de la formule (4) : car, d'après cette formule, dont on élève les deux membres à la puissance p, on peut écrire

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Theta^p(x)} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^{np} q^{pn^2} e^{\frac{pn\pi x i}{K}}.$$

Dans cette nouvelle série, la convergence est évidente, car le module de q est moindre que l'unité. Cette série définit une fonction holomorphe de x, $G(x)$, de sorte que la fonction doublement périodique $\varphi(x)$ se présente maintenant sous la forme

$$\varphi(x) = \frac{G(x)}{\Theta^p(x)}.$$

C'est une fonction elliptique, car elle n'a que des pôles à distance finie, à savoir les zéros de Θ. On sait que la fonction Θ n'a qu'un zéro simple dans chaque parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$. La fonction φ a donc un seul pôle d'ordre p dans chaque parallélogramme.

Si $p = 1$, il semble que la fonction φ n'ait qu'un pôle simple dans un parallélogramme : mais alors elle doit se réduire à une constante, ce qu'il est aisé de vérifier, car, si $p = 1$, on a

$$G(x) = \Theta(x), \qquad \varphi(x) = 1.$$

3. Soit maintenant a une constante différente de zéro. La série

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{a + \Theta^p(x + 2niK')}$$

est encore convergente et définit encore une fonction aux deux périodes $2K$ et $2iK'$. Mais cette fonction admet dans chaque parallélogramme des périodes une *infinité* de pôles qui sont les zéros des fonctions

$$a + \Theta^p(x + 2niK').$$

Elle a donc des points singuliers essentiels à distance finie et ce n'est pas une fonction elliptique.

4. On étendra sans peine ces considérations de la façon suivante. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ des constantes et $R(x)$ une fonction rationnelle à coefficients constants de $\Theta(x-\alpha_1), \Theta(x-\alpha_2), \ldots, \Theta(x-\alpha_\nu)$. Si la série

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} R(x + 2niK')$$

est convergente, elle définit une fonction doublement périodique qui est elliptique quand la fonction $R(x)$ est homogène par rapport aux fonctions Θ qui la composent, de façon à se reproduire multipliée par une exponentielle linéaire en x, quand x augmente de $2iK'$.

En prenant les séries

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a^n R(x + 2niK')$$

ou

$$F_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a^n q^{mn^2} e^{\frac{nm\pi x i}{K}} R(x + 2niK')$$

(m entier constant), on obtient des fonctions à multiplicateurs constants ou exponentiels.

Enfin, on peut former des séries analogues à celles que nous venons de considérer, en les composant avec des fonctions Θ de deux ou plusieurs variables.