

P. SONDAT

Sur quelques propriétés des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 507-517

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__507_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES

[Suite (1)];

PAR M. P. SONDAT.

19. Conique rapportée au triangle de deux de ses tangentes et de la corde des contacts.

Toute conique est représentée par l'équation générale

$$(27) \quad (P\beta^2 + Q\beta + R)\alpha^2 + (S\beta + T)\alpha + u = 0.$$

Elle coupe les côtés BC, CA, AB aux points λ et λ_1 , μ et μ_1 , ν et ν_1 , racines des équations

$$(28) \quad \begin{cases} R\lambda^2 + T\lambda + U = 0, \\ P\mu^2 + Q\mu + R = 0, \\ U\nu^2 - S\nu + P = 0. \end{cases}$$

Elle sera donc tangente en A à AC et en B à BC, si l'on a

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad T = 0, \quad U = 0.$$

Si donc m désigne le rapport $S : R$, ses équations seront

$$(29) \quad \alpha + m\beta = 0, \quad \alpha^2\gamma - m = 0, \quad m\beta^2\gamma - 1 = 0,$$

et, en coordonnées tangentielles,

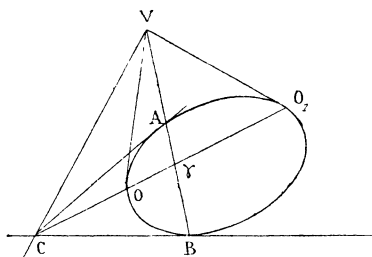
$$(30) \quad m\mu + 4\lambda = 0, \quad 4\lambda^2\nu + m = 0, \quad m\mu^2\nu + 4 = 0.$$

On voit aisément, par ces équations, que toute sécante COO_1 (fig. 5), menée par C, coupe la conique en deux points conjugués sur $C\gamma$ et que deux tangentes issues

(1) Voir *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 369.

Fig. 5.

•



20. THÉORÈME. — Si le point ω (xyz) décrit une droite $X(\lambda\mu\nu)$, et si l'on mène les droites $x\mu z, x\beta\nu, \lambda y\gamma$ et $\alpha_1 y\nu, \lambda\beta_1 z, x\mu_1\gamma_1$, les deux points $O(x\beta\gamma)$ et $O_1(x_1\beta_1\gamma_1)$ appartiendront à la conique Q circonscrite à ABC selon X , et la corde OO_1 , polaire de ω , enveloppera la conique Q_1 inscrite selon le pôle $(-\lambda, -\mu, -\nu)$ de X .

2

$$\frac{\lambda}{x} + \frac{y}{\mu} = 1, \quad \frac{\mu}{\gamma} + \frac{z}{\nu} = 1, \quad \frac{\nu}{z} + \frac{x}{\lambda} = 1,$$

$$\begin{cases} \alpha\mu z = x\beta v = \lambda y\gamma = 1, \\ \alpha_1 y v = \lambda\beta_1 z = x\mu\gamma_1 = 1, \end{cases}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\nu}{\lambda} = 1, \quad \frac{\gamma_1}{\nu} + \frac{\lambda}{\alpha_1} = 1,$$

Soit $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ la corde OO_1 .

(509)

On a

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\nu x - \lambda z}{\nu z (\mu x - \lambda y)}, \\ \mu_1 &= \frac{\lambda y - \mu x}{\lambda x (\nu y - \mu z)}, \\ \nu_1 &= \frac{\mu z - \nu y}{\mu y (\lambda z - \nu x)},\end{aligned}$$

ou, en utilisant les équations de X,

$$\lambda_1 + x = 0, \quad \mu_1 + y = 0, \quad \nu_1 + z = 0.$$

Donc X₁ est la polaire de ω (tri. ABC).

On a, d'ailleurs,

$$\frac{-\lambda}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{-\mu} = 1,$$

ou (1) X₁ enveloppe Q₁, et l'on a (6), pour le point de contact,

$$-\frac{x^2}{\lambda}, \quad -\frac{y^2}{\mu}, \quad -\frac{z^2}{\nu}.$$

La même construction, qui donne deux points de Q, donne donc en même temps une tangente de Q₁.

21. THÉORÈME. — *Si la droite ρ(xyz) tourne autour du point O(αβγ) et si l'on détermine les points I(λβz), H(xμγ), K(αγν) et I₁(λ₁γγ₁), H₁(αμ₁z), K₁(xβν₁), les deux droites X(λμν) et X₁(λ₁μ₁ν₁) envelopperont la conique Q₁ inscrite à ABC selon O, et le point XX₁, pôle de ρ, décrira la conique Q, circonscrite selon la polaire (−α, −β, −γ) de O.*

On a (1)

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} = 1, \quad \frac{y}{\beta} + \frac{\gamma}{z} = 1, \quad \frac{z}{\gamma} + \frac{\alpha}{x} = 1,$$

et comme

$$\begin{cases} \lambda \beta z = x \mu \gamma = \alpha \gamma \nu = -1, \\ \lambda_1 \gamma \gamma_1 = \alpha \mu_1 z = x \beta \nu_1 = -1, \end{cases}$$

il vient, en remplaçant,

$$\frac{\beta}{\mu} + \frac{\nu}{\gamma} = 1, \quad \frac{\gamma}{\nu_1} + \frac{\lambda_1}{\alpha} = 1.$$

ou (1), X et X₁ enveloppent Q₁.

Soit O₁(x₁ β₁ γ₁) le point XX₁. On a

$$x_1 = \frac{\alpha \nu - \beta x}{\beta \gamma (\gamma x - \alpha z)},$$

$$\beta_1 = \frac{\beta z - \gamma \nu}{\gamma z (\alpha \gamma - \beta x)},$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma x - \alpha z}{\alpha x (\beta z - \gamma \nu)},$$

ou, d'après les équations de O,

$$x_1 - x = 0, \quad \beta_1 + \nu = 0, \quad \gamma_1 + z = 0.$$

Donc O₁ est le pôle de p (tri. ABC), et, comme

$$-\frac{x_1}{z} + \frac{-\beta}{\beta_1} = 1,$$

O₁ décrit la conique Q.

On a d'ailleurs (4), pour la tangente en O₁,

$$-\frac{x^2}{z}, \quad -\frac{\nu^2}{\beta}, \quad -\frac{z^2}{\gamma}.$$

La même construction, qui donne deux tangentes de Q₁ donne donc aussi un point de Q.

22. THÉORÈME. — On donne une droite X(λμν) et un point O(αβγ) que l'on joint à un point O₁(x₁ β₁ γ₁) de X par la droite p(LMN). Si l'on prend les conjugués L₁, M₁, N₁ de L, M, N sur OO₁, les droites AL₁, BM₁, CN₁ seront concourantes en un point ω(xy z), et ce point ω décrira une conique Q circonscrite à ABC et pour laquelle O sera le pôle de X.

Comme L₁ est le conjugué de L sur OO₁, x sera le

(511)

conjugué de L sur xx_1 . Or, on a

$$L = \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\gamma - \gamma_1)}.$$

Donc

$$x = \frac{-(\beta + \beta_1)}{\beta\beta_1(\gamma + \gamma_1)}.$$

On trouve de même

$$y = \frac{-(\gamma + \gamma_1)}{\gamma\gamma_1(\alpha + \alpha_1)}, \quad z = \frac{-(\alpha + \alpha_1)}{\alpha\alpha_1(\beta + \beta_1)}.$$

On a ainsi le point $\omega(xy\ z)$, et les relations donnent

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\alpha(\alpha\beta + xy - \alpha\gamma)}{\alpha\beta - xy + \alpha\gamma}, \\ \beta_1 &= \frac{\beta(\alpha\gamma + xy - \alpha\beta)}{xy - \alpha\gamma + \alpha\beta}, \\ \gamma_1 &= \frac{+\gamma(\alpha\beta - xy + \alpha\gamma)}{\alpha\gamma + xy - \alpha\beta}. \end{aligned}$$

Or, le point O_1 étant sur X, on a (1)

$$\frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\beta_1}{\mu} = 1,$$

ou, en remplaçant,

$$x : \frac{z(\lambda\mu + \alpha\beta + \mu\gamma)}{\lambda\mu - \alpha\beta - \mu\gamma} = \frac{\beta(\mu\alpha - \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta} : \gamma - 1.$$

Donc (1) ω décrit la conique Q circonscrite à ABC selon la droite $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, pour laquelle

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\alpha(\lambda\mu + \alpha\beta + \mu\gamma)}{\lambda\mu - \alpha\beta + \mu\gamma}, \\ \mu_1 &= \frac{\beta(\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu + \alpha\beta}, \\ \nu_1 &= \frac{-\gamma(\lambda\mu - \alpha\beta + \mu\alpha)}{\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta}. \end{aligned}$$

D'ailleurs, comme on a

$$\lambda = \frac{\mu_1 - \beta}{\mu_1\beta(\gamma - \nu_1)}, \quad \mu = \frac{\nu_1 - \gamma}{\nu_1\gamma(\alpha - \lambda_1)}, \quad \nu = \frac{\lambda_1 - \alpha}{\lambda_1\alpha(\beta - \mu_1)},$$

23. THÉORÈME. — On donne un point $O(\alpha\beta\gamma)$ et une droite $X(\lambda\mu\nu)$, et par O on mène une droite $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, qui coupe X en ω . Si par ω on mène les rayons l_1, m_1, n_1 , conjugués des droites $\omega A, \omega B, \omega C$ dans l'angle XX_1 , et coupant les côtés de ABC en x, y, z , on aura la droite $\rho(xyz)$, et cette droite enveloppera une conique Q_1 inscrite à ABC et pour laquelle X sera la polaire de O .

Si ωA coupe BC en L , ce point sera le conjugué de x sur $\lambda\lambda_1$, et comme

$$L = \frac{\nu_1 - \nu}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)},$$

on aura

$$x = \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\mu + \mu_1)},$$

et de même

$$y = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda\lambda_1(\nu + \nu_1)}, \quad z = \frac{\mu + \mu_1}{\mu\mu_1(\lambda + \lambda_1)}.$$

On a donc la droite $\rho(xyz)$, et les relations donnent

$$\lambda_1 = \frac{\lambda(x - \lambda + \lambda\nu xy)}{\lambda - x + \lambda\nu xy},$$

$$\mu_1 = \frac{\mu(\lambda - x + \lambda\nu xy)}{\lambda + x - \lambda\nu xy},$$

$$\nu_1 = \frac{\nu(\lambda + x - \lambda\nu xy)}{x - \lambda + \lambda\nu xy}.$$

Or, puisque X_1 passe par O , on a

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1,$$

ou, en remplaçant

$$\frac{\lambda(\mu x + \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu x + \lambda\mu + \alpha\beta} : x + y : \frac{\mu(\mu x + \lambda\mu + \alpha\beta)}{\mu x - \lambda\nu + \alpha\beta} = 1.$$

Donc (1), ρ enveloppe la conique Q_1 inscrite selon le

point $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, pour lequel

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\lambda(\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta}, \\ \beta_1 &= \frac{\mu(\mu\alpha + \lambda\mu + \alpha\beta)}{\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta}, \\ \gamma_1 &= \frac{-\nu(\mu\alpha - \lambda\mu + \alpha\beta)}{\mu\alpha + \lambda\mu - \alpha\beta}.\end{aligned}$$

D'ailleurs, comme on a

$$\alpha = \frac{\nu - \gamma_1}{\nu\gamma_1(\mu - \beta_1)}, \quad \beta = \frac{\lambda - \alpha_1}{\lambda\alpha_1(\nu - \gamma_1)}, \quad \gamma = \frac{\mu - \beta_1}{\mu\beta_1(\lambda - \alpha_1)},$$

$O(14)$ est le pôle de X par rapport à Q_1 .

Remarque I. — On voit aisément que si O appartient à X , cette droite est tangente en O , et que si O est le pôle de X (tri. ABC) O_1 se confond avec O .

Remarque II. — Le théorème permet de décrire une conique dont on donne trois tangentes a, b, c et la polaire X d'un point O , ou encore quatre tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

24. THÉORÈME. — *Si deux triangles sont circonscrits à ABC et homologiques avec lui (axes X et X_1), les droites qui joignent leurs sommets correspondants forment un triangle $\alpha\beta\gamma$ inscrit dans ABC et homologique avec lui. Le centre ω d'homologie est le quatrième point commun aux coniques Q et Q_1 circonscrites à ABC selon les droites X et X_1 , et l'axe ρ d'homologie est la droite qui joint les points O et O_1 , pôles des droites X et X_1 par rapport à ABC et aussi par rapport à ces coniques.*

Coupons ABC par $X(\lambda\mu\nu)$ et $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$. Les droites

$A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$, d'une part, et les droites $A\lambda_1$, $B\mu_1$, $C\nu_1$, d'autre part, forment les triangles IHK et $I_1H_1K_1$ circonscrits à ABC et homologues, axes X et X_1 et centres $O(-\lambda, -\mu, -\nu)$ et $O_1(-\lambda_1, -\mu_1, -\nu_1)$.

On a

$$\left\{ \begin{array}{lll} II_1 : \frac{\mu - \mu_1}{\mu\mu_1(\nu - \nu_1)}, & \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\lambda_1 - \lambda)}, & \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda\lambda_1(\mu - \mu_1)}, \\ HH_1 : \frac{\mu - \mu_1}{\mu\mu_1(\nu_1 - \nu)}, & \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\lambda - \lambda_1)}, & \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda\lambda_1(\mu - \mu_1)}, \\ KK_1 : \frac{\mu - \mu_1}{\mu\mu_1(\nu_1 - \nu)}, & \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\lambda_1 - \lambda)}, & \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda\lambda_1(\mu - \mu_1)}. \end{array} \right.$$

Ces valeurs montrent que les droites II_1 , HH_1 , KK_1 forment un triangle $\alpha\beta\gamma$ inscrit dans ABC et homologique selon le centre $\omega(\alpha\beta\gamma)$,

$$\alpha = \frac{\mu - \mu_1}{\mu\mu_1(\nu_1 - \nu)}, \quad \beta = \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\lambda_1 - \lambda)}, \quad \gamma = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda\lambda_1(\mu - \mu_1)},$$

et selon l'axe $\varphi(x, y, z)$,

$$x = -\alpha, \quad y = -\beta, \quad z = -\gamma,$$

qui est la polaire de λ .

Or on a

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\beta} = 1, \quad \frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

c'est-à-dire que ω appartient aux deux coniques Q et Q_1 et par suite est leur quatrième point commun.

Les équations précédentes peuvent d'ailleurs s'écrire

$$\frac{x}{-\lambda} + \frac{y}{\beta} = 1, \quad \frac{x}{-\lambda_1} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

ou l'axe φ passe par

$$O(-\lambda, -\mu, -\nu)$$

et

$$O_1(-\lambda_1, -\mu_1, -\nu_1),$$

pôles des droites X et X_1 .

Remarque. — Si l'une des droites X, X_1 est fixe, on pourra décrire sa conique, en déplaçant l'autre droite.

23. THÉORÈME. — *Étant donnés les deux points $O(\alpha\beta\gamma)$ et $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, si les côtés correspondants des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ se coupent en A_1, B_1, C_1 , le triangle $A_1B_1C_1$ sera circonscrit à ABC et homologique avec lui. L'axe $\rho(\lambda\mu\nu)$ d'homologie est la quatrième tangente commune aux coniques Q et Q_1 , inscrites à ABC selon les points O et O_1 , et le centre $\omega(xyz)$ d'homologie est le point de rencontre des droites $X(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ et $X_1(-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1)$, polaires de O et O_1 par rapport à ABC et aussi par rapport à ces coniques.*

On a

$$\begin{cases} A_1 : \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma\gamma_1(\beta - \beta_1)}, & \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha\alpha_1(\gamma - \gamma_1)}, & \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\alpha - \alpha_1)}, \\ B_1 : \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma\gamma_1(\beta - \beta_1)}, & \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha\alpha_1(\gamma - \gamma_1)}, & \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\alpha - \alpha_1)}, \\ C_1 : \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma\gamma_1(\beta - \beta_1)}, & \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha\alpha_1(\gamma - \gamma_1)}, & \frac{\beta_1 - \beta}{\beta\beta_1(\alpha - \alpha_1)}. \end{cases}$$

Ces valeurs montrent que les points (A, B_1, C_1) , (A_1, B, C_1) , (A_1, B_1, C) sont trois à trois en lignes droites, et que les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes, c'est-à-dire que $A_1B_1C_1$ est circonscrit à ABC et homologique avec lui selon l'axe $\rho(\lambda\mu\nu)$,

$$\lambda = \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma\gamma_1(\beta - \beta_1)}, \quad \mu = \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha\alpha_1(\gamma - \gamma_1)}, \quad \nu = \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\alpha - \alpha_1)},$$

et selon le centre $\omega(xyz)$,

$$x = -\lambda, \quad y = -\mu, \quad z = -\nu.$$

qui est le pôle de ρ .

Or on a

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \quad \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1,$$

c'est-à-dire que φ enveloppe Q et Q_1 et par suite est la quatrième tangente commune à ces coniques.

Les équations précédentes peuvent s'écrire

$$\frac{-\alpha}{.x} + \frac{.y}{-\beta} = 1, \quad \frac{-\alpha_1}{.x} + \frac{.y}{-\beta_1} = 1,$$

ou (1) ω appartient à X et à X_1 et par suite est leur point de rencontre.

Remarque. — Si l'un des points O , O_1 est fixe, on pourra construire sa conique en déplaçant l'autre point.

26. Je termine cette Note en résumant les constructions obtenues de la conique Q de cinq points A , B , C , D , E . En prenant ABC pour triangle de référence, si Y et Z sont les polaires des points D et E , la polaire X du point $O(YZ)$ sera la droite suivant laquelle la conique Q sera circonscrite à ABC . Après avoir obtenu, avec la règle, le point O et la droite $X(\lambda\mu\nu)$, on pourra tracer la conique Q :

I. Par le pôle ω d'une droite φ passant par O ;

II. A l'aide d'un point décrivant la droite X (16 ou 20);

III. En déplaçant une droite X_1 (24);

IV. En s'aidant du centre de la conique, que l'on obtient en joignant les sommets du triangle des droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ aux milieux des côtés de ABC , et utilisant la remarque II du n° 22.