

E. AMIGUES

Démonstration algébrique d'un théorème relatif à l'intersection de deux courbes

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 447-448

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__447_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION ALGÈBRIQUE D'UN THÉORÈME RELATIF A L'INTERSECTION DE DEUX COURBES;

PAR M. E. AMIGUES.

Si un même point est d'ordre p dans une courbe d'ordre m et d'ordre q dans une autre courbe d'ordre n , ces deux courbes se coupent au plus en $(mn - pq)$ autres points.

Prenons ce point pour origine. Les équations des deux courbes sont

$$\begin{aligned}\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \dots + \varphi_p(x, y) &= 0, \\ \psi_n(x, y) + \psi_{n-1}(x, y) + \dots + \psi_q(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Posons

$$y = tx.$$

A chaque solution (x, y) correspond une solution (x, t) , et à chaque solution (x, t) correspond une solution (x, y) .

Étudions donc les solutions (x, t) , qui sont données par les équations

$$\begin{aligned}x^m \varphi_m(1, t) + x^{m-1} \varphi_{m-1}(1, t) + \dots + x^p \varphi_p(1, t) &= 0, \\ x^n \psi_n(1, t) + x^{n-1} \psi_{n-1}(1, t) + \dots + x^q \psi_q(1, t) &= 0.\end{aligned}$$

Supprimons les solutions composées d'un x nul et d'un t arbitraire, qui donneraient un y nul et par suite

l'origine. Les équations deviennent

$$x^{m-p} \varphi_m(1, t) + x^{m-p-1} \varphi_{m-1}(1, t) + \dots + \varphi_p(1, t) = 0, \\ x^{n-q} \psi_n(1, t) + x^{n-q-1} \psi_{n-1}(1, t) + \dots + \psi_q(1, t) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à compter les solutions de ce système.

Pour cela nous allons éliminer x et prouver que l'équation en t est au plus de degré $mn - pq$.

Représentons les équations comme il suit :

$$a_0 x^{m-p} + a_1 x^{m-p-1} + \dots + a_i x^{m-p-i} + \dots + a_{m-p} \equiv 0, \\ b_0 x^{n-q} + b_1 x^{n-q-1} + \dots + b_j x^{n-q-j} + \dots + b_{n-q} \equiv 0.$$

Le résultant est de la forme

$$\Sigma M a_i^\lambda a_j^\mu b_k^\nu b_l^\rho$$

avec la condition

$$\lambda i + \mu j + \nu k + \rho l = (m-p)(n-q),$$

a_i est un polynome en t qui est au plus de degré $m - i$ et a_i^λ est au plus de degré $\lambda(m - i)$. De même b_k^ν est au plus de degré $\nu(n - k)$.

Donc le résultant est un polynome en t de degré au plus égal à

$$\lambda(m - i) + \mu(m - j) + \nu(n - k) + \rho(n - l),$$

c'est-à-dire à

$$m(\lambda + \mu) + n(\nu + \rho) - (m-p)(n-q);$$

mais on a aussi, par les propriétés du résultant,

$$\lambda + \mu \leq n - q, \\ \nu + \rho \leq m - p.$$

Donc le degré du résultant est au plus

$$m(n - q) + n(m - p) - (m-p)(n-q),$$

c'est-à-dire

$$mn - pq.$$