

E. BARISIEN

Sur les podaires successives d'une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 233-244

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__233_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE [fin (1)];

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN.

III. — APPLICATION AU CERCLE ET A SES PODAIRES PAR RAPPORT A UN POINT DE LA CIRCONFÉRENCE DU CERCLE.

En prenant pour pôle le point de la circonférence et pour axe polaire le diamètre passant par le point, l'équation du cercle est

$$r = a \cos \theta,$$

a désignant le diamètre du cercle.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} r' &= -a \sin \theta, & r'' &= -a \cos \theta, \\ r^2 + r'^2 &= a^2, & r'^2 - rr'' &= a^2, & r^2 + 2r'^2 - rr'' &= 2a^2. \end{aligned}$$

Aire de la m^{ième} podaire. — On trouve

$$\frac{dU_m}{d\theta} = \frac{a^2}{2} (m+1) \cos^{2m+2} \theta.$$

Donc

$$U_m = a^2 (m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+2} \theta \, d\theta.$$

Or, on sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+2} \theta \, d\theta = \frac{1.3.5 \dots (2m+1)}{2.4.6 \dots (2m+2)} \frac{\pi}{2}.$$

Par suite

$$U_m = \frac{\pi a^2}{4} \frac{1.3.5 \dots (2m+1)}{2.4.6 \dots 2m},$$

(1) Voir même Tome, p. 207.

ou encore

$$U_m = \frac{\pi a^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2m}\right).$$

Donc

$$(\text{Cercle}) \quad U_0 = \frac{\pi a^2}{4},$$

$$(\text{Limaçon de Pascal}) \quad U_1 = \frac{3\pi a^2}{8},$$

$$U_2 = \frac{15\pi a^2}{32},$$

$$U_3 = \frac{35\pi a^2}{64},$$

$$U_4 = \frac{315\pi a^2}{512},$$

.....

Si l'on veut avoir l'équation de la $m^{\text{ième}}$ podaire, il suffit d'éliminer θ entre les deux équations

$$\theta_m = (m+1)\theta,$$

$$r_m = a \cos^{m+1} \theta,$$

ce qui donne

$$r_m = a \cos^{m+1} \left(\frac{\theta_m}{m+1} \right).$$

Rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ podaire

$$R_m = \frac{a(m+1)}{m+2} \cos^m \theta.$$

On trouve par suite, pour la longueur de la développée de la $m^{\text{ième}}$ podaire,

$$S_m = 2a \frac{(m+1)}{m+2} (\cos^m \theta)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}},$$

c'est-à-dire

$$S_m = \frac{2a(m+1)}{m+2}.$$

Rectification de la m^{ième} podaire. — On a

$$\frac{ds_m}{d\theta} = a(m+1) \cos^m \theta.$$

Donc

$$s_m = 2a(m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta d\theta.$$

Si m est pair, on aura

$$s_m = 2a(m+1) \frac{1.3.5 \dots (m-1)}{2.4.6 \dots m} \frac{\pi}{2}.$$

Si m est impair, on aura

$$s_m = 2a(m+1) \frac{2.4.6 \dots (m-1)}{1.3.5 \dots m}.$$

On a donc

$$(\text{Cercle}) \quad s_0 = \pi a,$$

$$(\text{Limaçon de Pascal}) \quad s_1 = 4a,$$

$$s_2 = \frac{3\pi a}{2},$$

$$s_3 = \frac{16a}{3},$$

$$s_4 = \frac{15\pi a}{8},$$

$$s_5 = \frac{32a}{5},$$

$$\dots\dots\dots$$

Anti-podaires. — Pour la première anti-podaire, on trouve

$$\theta_{-1} = 0, \quad U_{-1} = 0.$$

C'est qu'en effet la première anti-podaire se réduit alors à l'autre extrémité P_{-1} du diamètre passant par O .

La seconde anti-podaire donne

$$\theta_{-2} = -\theta, \quad r_{-2} = \frac{a}{\cos \theta}.$$

Son équation est par suite

$$r_{-2} = \frac{a}{\cos \theta_{-2}}.$$

Elle représente la droite tangente à l'extrémité P_{-1} du diamètre passant par O.

Pour la troisième anti-podaire, on a

$$\theta_{-3} = -2\theta, \quad r_{-3} = \frac{a}{\cos^2 \theta}.$$

Son équation est donc

$$r_{-3} = \frac{a}{\cos^2 \frac{\theta_{-3}}{2}}.$$

Elle représente une parabole ayant pour sommet le point P_{-1} et pour foyer le point O. On sait, en effet, que le lieu des projections du foyer d'une parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.

Les autres anti-podaires successives sont alors les anti-podaires du foyer de la parabole.

Aire de la podaire de la développée de la courbe.

— La courbe primitive étant un cercle, sa développée n'est autre chose que le centre du cercle : par suite, la podaire de ce point est le lieu des projections du point sur les droites passant par le centre du cercle. Ce lieu est le cercle de rayon $\frac{a}{4}$ dont l'aire est

$$W_1 = \frac{\pi a^2}{16}.$$

Aire de la podaire de la développée de la $(m-1)^{\text{ième}}$ podaire. — On a

$$\frac{dW_m}{d\theta} = \frac{a^2(m+1)}{2} \cos^2 \theta \sin^{2m} \theta.$$

Donc

$$W_m = a^2 (m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \theta \cos^2 \theta d\theta,$$

c'est-à-dire

$$W_m = \frac{\pi a^2}{4} \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m}.$$

Par conséquent

$$W_m = \frac{U_m}{2m+1}.$$

Rayon de courbure de la podaire de la développée de la $(m-1)^{i\text{ème}}$ podaire. — Nous n'avons pas donné de formule générale pour ce rayon de courbure R_m , parce qu'elle serait trop compliquée. Dans le cas présent, nous avons

$$\varphi_m = a \sin \theta \cos^m \theta.$$

Or on a

$$R_m = \frac{(\varphi_m^2 + \varphi_m'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi_m^2 + 2\varphi_m'\varphi_m'' + \varphi_m\varphi_m'''}.$$

En posant

$$\varphi_m' = \frac{d\varphi_m}{d\omega_m}, \quad \varphi_m'' = \frac{d^2\varphi_m}{d\omega_m^2},$$

on a donc

$$\begin{aligned} \varphi_m' &= a \cos^{m-1} \theta (\cos^2 \theta - m \sin^2 \theta) \frac{d\theta}{d\omega_m} \\ &= \frac{a}{m+1} \cos^{m-1} \theta (\cos^2 \theta - m \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

On calculerait de même φ_m'' . On a enfin

$$R_m = \frac{a \cos^{m-1} \theta}{m+1} \frac{(m^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{m^2 \sin^2 \theta - m \sin^2 \theta \cos 2\theta + \cos^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)}.$$

Longueur de la développée de la podaire de la développée de la $(m-1)^{i\text{ème}}$ podaire. — On a

$$S_m = 2(R_m)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{m+1}.$$

IV. — APPLICATION A LA LEMNISCATE DE BERNOULLI
ET A SES PODAIRES DU CENTRE.

L'équation cartésienne de la lemniscate de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

devient en coordonnées polaires

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

On trouve pour l'aire U_0 de la courbe

$$U_0 = a^2.$$

Aire de la $m^{\text{ième}}$ podaire. — On trouve

$$U_m = 2a^2(m+1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{(2m+1)} 2\theta \, d\theta = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)} a^2.$$

Donc

$$U_0 = a^2,$$

$$U_1 = 2a^2,$$

$$U_2 = \frac{8a^2}{3},$$

$$U_3 = \frac{48a^2}{15},$$

$$U_4 = \frac{128a^2}{35},$$

.....

L'équation de la $m^{\text{ième}}$ podaire est

$$r_m^2 = a^2 \cos^{2m+1} \left(\frac{2\theta_m}{2m+1} \right).$$

Remarquons que l'aire U_m peut aussi s'écrire

$$U_m = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2m-1}\right) a^2.$$

Si donc on compare cette aire à l'aire analogue de

la $m^{\text{ième}}$ podaire du cercle (§ III), on a la propriété suivante :

Si l'on considère une lemniscate de centre O et dont l'un des sommets est en A, tel que $OA = a$, avec le cercle décrit sur AO comme diamètre, le produit des aires des $m^{\text{ièmes}}$ podaires relatives à la lemniscate et au cercle a pour expression

$$\frac{\pi a^4}{4} (2m + 1).$$

On en déduit l'identité assez curieuse

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2m-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2m}\right) = 2m + 1$$

ou

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p}\right) = p + 1.$$

Rayon de courbure de la podaire d'ordre m. —

On a

$$R_m = \frac{a(2m+1)}{2m+3} \cos^{m-\frac{1}{2}} 2\theta.$$

Longueur de la développée de la podaire d'ordre m.

— On déduit de la formule précédente

$$S_m = \frac{4a(2m+1)}{2m+3} \left(\cos^{m-\frac{1}{2}} 2\theta \right)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{4a(2m+1)}{2m+3}.$$

Pour $m = 0$, on obtient la longueur S_0 de la développée de la lemniscate

$$S_0 = \frac{4a}{3}.$$

Anti-podaires. — On trouve pour l'équation de cette anti-podaire

$$r_{-1} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta_{-1}}};$$

elle représente l'hyperbole équilatère ayant même arc réel en grandeur et en direction que celui de la lemniscate.

Toutes les autres anti-podaires sont par suite des courbes à branches infinies et ne présentent rien d'intéressant. Il en est de même des podaires des développées des anti-podaires.

Podaire de la développée de la lemniscate. — On trouve pour l'équation de cette podaire

$$\rho_1^2 = a^2 \sin^2 \frac{2\omega_1}{3} \cos \frac{2\omega_1}{3},$$

et pour son aire

$$W_m = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = a^2.$$

Podaire de la développée de la (m-1)^{ème} podaire.

— On a pour l'aire de cette podaire

$$W_m = 2a^2(2m+1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta \cos^{2m-1} 2\theta \, d\theta,$$

$$W_m = a^2 \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}.$$

Donc

$$W_m = \frac{U_m}{2m}.$$

Rayon de courbure de la podaire de la développée de la (m-1)^{ème} podaire de la lemniscate. — Sans donner l'expression de ce rayon de courbure, laquelle est assez compliquée, nous nous contenterons de donner la longueur de la développée de la podaire de la développée de la (m-1)^{ème} podaire

$$s_m = 4(\mathfrak{A}_m)_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} = \frac{4a}{2m+1}.$$

V. — APPLICATION AUX COURBES DE LA FAMILLE

$$r^m = a^m \cos m\theta.$$

On a ici

$$r = a(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}},$$

$$r'^2 + r'^2 = a^2(\cos m\theta)^{\frac{2}{m}-2},$$

$$r'^2 - rr'' = ma^2(\cos m\theta)^{\frac{2}{m}-2}.$$

Donc

$$\frac{dV}{d\theta} = m, \quad \frac{d\theta_1}{d\theta} = m + 1, \quad \theta_1 = (m + 1)\theta$$

et

$$r_1 = a(\cos m\theta)^{\frac{m+1}{m}}.$$

Podaires successives. — On déduit de là pour l'équation de la première podaire

$$r_1 = a \left(\cos \frac{m}{m+1} \theta_1 \right)^{\frac{m+1}{m}}$$

ou

$$r_1^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \cos \frac{m}{m+1} \theta_1.$$

Cette équation représente une courbe de même famille que la courbe primitive; c'est ce qu'a démontré M. de Rhéville à l'article déjà cité (*Nouvelles Annales*, 1890, p. 143).

L'équation de la deuxième podaire sera de même

$$r_2^{\frac{m}{2m+1}} = a^{\frac{m}{2m+1}} \cos \frac{m}{2m+1} \theta_2$$

et en général celle de la $n^{\text{ième}}$ podaire

$$r_n^{\frac{m}{nm+1}} = a^{\frac{m}{nm+1}} \cos \frac{m}{nm+1} \theta_n.$$

Rayon de courbure des podaires. — On trouve pour le rayon de courbure de la première podaire

$$R_1 = \alpha (\cos m\theta)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{m+1}{2m+1} \right)$$

ou

$$R_1 = r \frac{m+1}{2m+1}.$$

Or, le rayon de courbure de la courbe primitive a pour expression

$$R_0 = \frac{\alpha}{m+1} (\cos m\theta)^{\frac{1}{m}-1} = \frac{r}{(m+1) \cos m\theta} = \frac{r}{(m+1) \sin V}.$$

Donc, on a

$$r = (m+1) R_0 \sin V.$$

C'est, aux notations près, la formule de M. du Châtenet rappelée par M. de Rhéville à l'article précité.

Pour la $n^{\text{ième}}$ podaire, on trouve

$$R_n = \frac{r^{m(n-1)+1}}{\alpha^{m(n-1)}} \left[\frac{mn+1}{m(n-1)+1} \right].$$

Anti-podaires. — On trouve pour l'équation de la première anti-podaire

$$r^{\frac{m}{1-m}} = \alpha^{\frac{m}{1-m}} \cos \frac{m}{1-m} \theta_{-1}$$

et pour celle de la $n^{\text{ième}}$ podaire

$$r^{\frac{m}{1-mn}} = \alpha^{\frac{m}{1-mn}} \cos \frac{m}{1-mn} \theta_{-n}.$$

Il est intéressant de voir dans quel cas l'une des podaires successives peut être une *transformée par rayons vecteurs réciproques* de la courbe donnée.

Il faut déterminer n de façon que

$$\frac{m}{mn+1} = -m;$$

d'où

$$n = -\frac{2}{m}.$$

Comme m doit être un nombre entier, il faut donc que m soit égal à ± 1 , ± 2 , ou à une fraction de l'unité. Dans ce cas la courbe aura parmi l'une de ses podaires ou anti-podaires sa propre transformée par rayons vecteurs réciproques.

Si $m = \pm 1$, on a $n = \mp 2$, l'une des courbes est un cercle et sa transformée est la droite qui est en même temps la seconde anti-podaire du cercle par rapport à un point de sa circonférence.

Si $m = \pm 2$, il en résulte $n = \mp 1$, et l'on obtient les mêmes courbes que précédemment.

Si $m = -\frac{1}{2}$, on a $n = 4$, ce qui veut dire que la courbe

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos \frac{\theta}{2}}}$$

a pour transformée par rayons vecteurs réciproques sa quatrième podaire.

Si $m = +\frac{1}{9}$, $n = -18$: c'est donc la dix-huitième anti-podaire qui est la transformée de la courbe

$$r = a \sqrt[9]{\cos \frac{\theta}{9}}.$$

Écrivons maintenant les équations des podaires et anti-podaires des courbes de la famille

$$r^m = a^m \cos m\theta,$$

dans les cas particuliers de $m=1$ et $m=2$: le premier cas correspond au cercle et le second à la lemniscate. Nous avons étudié ces deux cas particuliers en détail.

1^o $m = 1$:

$$r_{-n} = \frac{a}{\left(\cos \frac{\theta_{-n}}{n-1} \right)^{(n-1)},}$$

.....,

$$r_{-3} = \frac{a}{\cos^2 \frac{\theta_{-3}}{2}} \quad (\text{Parabole}),$$

$$r_{-2} = \frac{a}{\cos \theta_{-2}} \quad (\text{Droite}),$$

$$\begin{cases} r_{-1} = a \\ \theta_{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{Point}),$$

$$r = a \cos \theta \quad (\text{Cercle}),$$

$$r_1 = a \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \quad (\text{Limaçon de Pascal}),$$

$$r_2 = a \cos^3 \frac{\theta_2}{3},$$

.....,

$$r_n = a \left(\cos \frac{\theta_n}{n+1} \right)^{n+1};$$

2^o $m = 2$:

$$r_{-n} = a \left(\cos \frac{2}{1-2n} \theta_{-n} \right)^{\frac{1-2n}{n}},$$

.....,

$$r_{-1} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2 \theta_{-1}}} \quad (\text{Hyperbole équilatère}),$$

$$r = (\cos 2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Lemniscate de Bernoulli}),$$

$$r_1 = a \left(\cos \frac{2 \theta_1}{3} \right)^{\frac{3}{2}},$$

.....,

$$r_n = a \left(\cos \frac{2}{2n+1} \theta_n \right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

Nos formules donnent lieu également à des applications intéressantes relatives à la cycloïde et aux développantes de cercle.