NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. BARRIEU

Théorie générale du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun des nombres commensurables

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14 (1895), p. 214-232

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__214_0>

THÉORIE GÉNÉRALE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET DU PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES COMMENSURABLES (1);

PAR M. P. BARRIEU,
Professeur au lycée de Périgueux.

APPLICATIONS. PRODUITS. ÉLÉVATIONS AUX PUISSANCES. TRANSFORMATIONS.

Produits. — Pour simplifier le langage, au lieu de dire que $D(a, b, c, \ldots)$ est le plus grand commun diviseur des nombres $a, b, c, \ldots$, nous dirons qu'il est le plus grand commun diviseur de l'expression $(a, b, c, \ldots)$. De même, pour le plus petit commun multiple.

Nous appellerons produit de deux expressions

$$(a, b, c, \ldots) \times (a', b', c', \ldots),$$

le résultat obtenu en effectuant la multiplication comme si les virgules étaient des signes $+$, mais sans effectuer la réduction des termes semblables. Ainsi

$$(a, b) \times (c, d) = (ac, bc, ad, bd).$$
$$(a, b) \times (a, b) = (a^2, ab, ab, b^2).$$

Dans ces conditions, nous aurons le théorème suivant :

Le produit des plus grands communs diviseurs (ou des plus petits communs multiples) de deux expressions est égal au plus grand commun diviseur (ou au plus petit commun multiple) du produit de ces deux expressions.

(1) *Voir* même tome, p. 95.

En effet, on a successivement

$$\begin{aligned} D(a, b, c)\,D(a', b') &= D[a\,D(a', b'), b\,D(a', b'), c\,D(a', b')] \\ &= D[D(aa', bb'), D(ba', bb'), D(ca', cb')] \\ &= D(aa', bb', ba', bb', ca', cb') \\ &= D[(a, b, c)(a', b')]. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

On aurait de même

$$m(a, b, c)\,m(a', b') = m[(a, b, c)(a', b')].$$

Le théorème, démontré pour deux facteurs, s'étend, par le procédé ordinaire, à un nombre quelconque de facteurs.

Élévation aux puissances. — Nous désignerons par

$$D^n(a, b, c, \ldots), \quad m^n(a, b, c, \ldots)$$

les n^{iemes} puissances du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple des nombres $a, b, c, \ldots$.

Si l'on élève plusieurs nombres à la même puissance, tous leurs facteurs premiers sont élevés à cette puissance, donc leur plus grand commun diviseur et leur plus petit commun multiple sont aussi élevés à cette même puissance, et l'on a

$$\text{(XIII)} \qquad D^n(a, b, c, \ldots) = D(a^n, b^n, c^n, \ldots),$$

$$\text{(XIV)} \qquad m^n(a, b, c, \ldots) = m(a^n, b^n, c^n, \ldots).$$

D'après ce théorème, on a

$$D^3(a, b) = D(a^3, b^3).$$

Mais, d'après le théorème sur les produits, on a

$$\begin{aligned} D^3(a, b) &= D[(a, b)^3] \\ &= D(a^3, a^2 b, ab^2, b^3). \end{aligned}$$

On a donc

$$D(a^3, b^3) = D(a^3, a^2 b, ab^2, b^3).$$

Ce qui montre que, dans le développement de $(a, b)^3$,

les termes a^2b et ab^2 peuvent être négligés en présence des termes a^3, b^3.

D'une façon générale, dans le développement de $(a, b)^n$ tous les autres termes peuvent être négligés en présence de a^n, b^n qui doivent seuls rester.

On peut se rendre compte de ce fait par la considération des facteurs premiers, en observant que le développement de $(a, b, c, \ldots)^n$ est une fonction entière et homogène du degré n.

Transformations. — Nous allons donner un exemple des transformations que l'on peut opérer à l'aide du théorème III.

Exemple : Transformer le produit

$$\mathrm{D}(a, b)\,\mathrm{D}(a, c)\,\mathrm{D}(b, c).$$

En désignant ce produit par P_2, on a successivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_2 &= \mathrm{D}(a, b)\,\mathrm{D}(a, c)\,\mathrm{D}(b, c)\\
&= \mathrm{D}(a^2b, ab^2, abc, b^2c, a^2c, abc, ac^2, bc^2)\\
&= \mathrm{D}(a^2b, ab^2, abc, b^2c, a^2c, abc, ac^2, bc^2, abc)\\
&= \mathrm{D}[\mathrm{D}(a^2b, ab^2, abc), \mathrm{D}(a^2c, ac^2, abc), \mathrm{D}(b^2c, bc^2, abc)]\\
&- \mathrm{D}[ab\,\mathrm{D}(a, b, c), ac\,\mathrm{D}(a, b, c), bc\,\mathrm{D}(a, b, c)]\\
&= \mathrm{D}(a, b, c)\,\mathrm{D}(ab, ac, bc).
\end{aligned}$$

Mais le corollaire III du théorème II donne

$$m(a, b, c)\,\mathrm{D}(ab, ac, bc) = abc.$$

On a donc

$$\mathrm{P}_2 = \frac{abc\,\mathrm{D}(a, b, c)}{m(a, b, c)}.$$

De cette formule, on tire

$$m(a, b, c) = \frac{abc\,\mathrm{D}(a, b, c)}{\mathrm{D}(a, b)\,\mathrm{D}(a, c)\,\mathrm{D}(b, c)},$$

formule qui répond à un cas particulier d'un théorème plus général que nous allons démontrer tout à l'heure.

Les propriétés du plus petit commun multiple étant les mêmes que celles du plus grand commun diviseur, les égalités précédentes subsisteront si l'on y permute les signes D et m. On a donc

$$D(a, b, c) = \frac{abc\, m(a, b, c)}{m(a, b)\, m(a, c)\, m(b, c)}.$$

Cet exemple suffira ici; nous donnerons à la fin de cette étude quelques exercices que le lecteur pourra résoudre.

II.

Définitions et notations nouvelles. — 1° Nous appellerons *produit alterné* de n facteurs un produit de la forme

$$A_1 \times A_2^{-1} \times A_3 \times A_4^{-1} \times \ldots \times A_n^{(-1)^{n+1}}.$$

2° Suivant l'usage adopté, nous désignerons par P_r le produit des plus grands communs diviseurs des groupes formés en combinant r à r les n nombres donnés a, b, c, ..., l. D'après cette notation, on a

$$P_2 = D(a, b)\, D(a, c) \ldots D(k, l).$$
$$P_3 = D(a, b, c)\, D(a, b, d) \ldots D(h, k, l),$$

et ainsi de suite jusqu'à $P_n = D(a, b, c, \ldots l)$.

Il y aurait pour P_1 une exception que nous lèverons en convenant de dire que le plus grand commun diviseur d'un nombre est ce nombre lui-même, de telle sorte que l'on aura : $D(a) = a$. Il y a là une extension de sens analogue à celle que l'on a introduite quand on a dit que la première puissance d'un nombre est ce nombre lui-même.

Avec cette convention, on aura

$$P_1 = D(a)\, D(b)\, D(c) \ldots D(l) = abc \ldots l = P.$$

Étendant les mêmes conventions au plus petit commun

multiple, nous désignerons par P'_r le produit des plus petits communs multiples des groupes formés en combinant r à r les nombres donnés.

3° Nous conviendrons de désigner par les notations

$$D(\Pi_r), \qquad m(\Pi_r)$$

le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des divers produits que l'on obtient en combinant r à r les n nombres donnés.

D'après cette notation, on a

$$\begin{aligned} D(\pi_1) &= D(a, b, c, \ldots, l), \\ D(\pi_2) &= D(ab, ac, \ldots, kl), \\ D(\pi_3) &= D(abc, abd, \ldots, hkl), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

De même pour le plus petit commun multiple.

Théorème IV. — *Étant donnés n nombres entiers ou fractionnaires a, b, c, ..., l, on a*

$$(XV) \qquad m(a, b, c, \ldots, l) = P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n+1}},$$

$$(XVI) \qquad D(a, b, c, \ldots, l) = P'_1 P'^{-1}_2 P'_3 P'^{-1}_4 \ldots P'^{(-1)^{n-1}}_n.$$

1° Proposons-nous de démontrer la formule (XV), dans laquelle le second membre est le produit alterné des plus grands communs diviseurs des groupes formés en combinant successivement 1 à 1, 2 à 2, ..., n à n, les nombres donnés.

Considérons un facteur premier quelconque p arbitrairement choisi, et désignons par

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_l, \quad a_{l+1}, \quad \ldots, \quad a_n$$

les nombres donnés disposés dans un ordre tel que les exposants

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_l, \quad \alpha_{l+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

dont le facteur p est affecté dans ces nombres, se trouvent rangés par ordre de *grandeur croissante*.

Cela fait, cherchons d'abord l'exposant e_i dont le facteur p est affecté dans le produit alterné des plus grands communs diviseurs des groupes qui commencent par a_i.

Pour cela, remarquons que les plus grands communs diviseurs des groupes qui commencent par a_i renferment tous le facteur premier p avec l'*exposant minimum* α_i; de telle sorte que la question se trouve ramenée à chercher combien il y a de groupes commençant par a_i dans chacun des facteurs $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$.

Or, dans P_r où tous les groupes sont composés de r termes, le nombre des groupes commençant par a_i est évidemment égal au nombre des combinaisons que l'on peut former en prenant $r-1$ à $r-1$ les $n-i$ nombres qui suivent a_i, c'est-à-dire égal à C_{n-i}^{r-1}.

Ainsi donc, le nombre des groupes qui commencent par a_i est

$$\begin{array}{rcl} 1 & \text{dans} & P_1, \\ C_{n-i}^1 & \text{»} & P_2, \\ C_{n-i}^2 & \text{»} & P_3, \\ \cdots & \cdot & \cdot\cdot, \\ C_{n-i}^{n-i} & \text{»} & P_{n-i+1}, \\ 0 & \text{»} & P_{n-i+2}, \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots, \\ 0 & \cdot & P_n. \end{array}$$

L'exposant de p dans le produit alterné des plus grands communs diviseurs des groupes qui commencent par a_i est donc :

$$(1) \qquad e_i = \alpha_i(1 - C_{n-i}^1 + C_{n-i}^2 - C_{n-i}^3 + \ldots \pm C_{n-i}^{n-i}).$$

Mais, pour avoir l'exposant e du facteur p dans le produit alterné $P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n-1}}$, il suffit de faire la

somme des valeurs que prend e_i quand on attribue successivement à i les valeurs 1, 2, 3, ..., n; on a donc

$$e = \sum_{i=1}^{i=n} e_i. \tag{2}$$

Or, dans l'égalité (1), le coefficient de α_i est la somme alternée des coefficients du binome et l'on sait que cette somme est toujours nulle.

Le coefficient de α_i dans l'égalité (1) est donc nul quand on attribue à i les valeurs 1, 2, 3, ..., $n-1$, tandis que ce coefficient prend la valeur 1 pour $i = n$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} e_i = 0\alpha_1 - 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + \ldots + 0\alpha_{n-1} + 1\alpha_n$$
$$= \alpha_n$$

Donc

$$e = \alpha_n.$$

Le facteur p entre donc dans le produit alterné $P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{-1^{n+1}}$ avec l'exposant α_n; mais α_n est précisément l'exposant *maximum* de p dans les nombres donnés; c'est donc aussi l'exposant avec lequel p entre dans $m(a, b, c, \ldots, l)$, et l'on a

$$m(a, b, c, \ldots, l) = P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n+1}} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° La démonstration de la formule (XVI) se ferait absolument de la même manière, en disposant les nombres dans un ordre tel que les exposants de p aillent en *décroissant*, et en substituant l'exposant *maximum* à l'exposant minimum.

On peut d'ailleurs déduire la formule (XVI) de la formule (XV) au moyen des formules de corrélation.

En effet, appliquons la formule (XV) aux nombres $\frac{1}{a}$,

$\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}$. Nous aurons

$$(1) \qquad m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = P_1 P_2^{-1} P_3 P_4^{-1} \ldots P_n^{(-1)^{n+1}}.$$

Mais

$$m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{D(a, b, c, \ldots, l)}.$$

D'autre part, P_r est un produit de facteurs de la forme

$$D\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots\right),$$

mais

$$D\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots\right) = \frac{1}{m(a, b, c, \ldots)}.$$

On a donc

$$P_r = \frac{1}{P'_r} = P'^{-1}_r,$$

et la formule (1) devient

$$\frac{1}{D(a, b, c, \ldots, l)} = P'^{-1}_1 P'_2 P'^{-1}_3 P'_4 \ldots P'^{(-1)^n}_n,$$

d'où

$$D(a, b, c, \ldots, l) = P'_1 P'^{-1}_2 P'_3 P'^{-1}_4 \ldots P'^{(-1)^{n+1}}_n \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Le théorème IV était déjà connu pour les nombres entiers; nous l'avons étendu aux nombres fractionnaires et nous en avons donné une démonstration nouvelle. L'introduction des produits alternés nous a permis d'en préciser l'énoncé. Ce théorème n'est d'ailleurs qu'un corollaire d'un théorème plus général qui n'avait pas encore été formulé et par lequel nous allons terminer cette étude.

THÉORÈME V. — *Étant donnés n nombres, entiers ou fractionnaires, a, b, c, ..., l; si l'on désigne par* ω_1, ω_2, ω_3, ... *les nombres figurés successifs de l'ordre*

$r-1$, on a

$$\text{(XVII)} \quad P_{r+1} = D^{\omega_1}(\pi_{n-r})\, D^{\omega_2}(\pi_{n-r-1})\, D^{\omega_3}(\pi_{n-r-2}) \ldots D^{\omega_{n-r}}(\pi_1),$$

$$\text{(XVIII)} \quad P'_{r+1} = m^{\omega_1}(\pi_{n-r})\, m^{\omega_2}(\pi_{n-r-1})\, m^{\omega_3}(\pi_{n-r-2}) \ldots m^{\omega_{n-r}}(\pi_1).$$

1° Établissons d'abord la formule (XVII), et, pour plus de précision, supposons $r = 3$. On verra bien d'ailleurs que le raisonnement est tout à fait général et s'applique à une valeur quelconque de r.

La formule à démontrer devient alors

$$P_4 = D^{\omega_1}(\pi_{n-3})\, D^{\omega_2}(\pi_{n-4})\, D^{\omega_3}(\pi_{n-5}) \ldots D^{\omega_{n-3}}(\pi_1),$$

et ω_1, ω_2, ω_3, ... représentent les nombres figurés successifs du deuxième ordre.

Cela posé, considérons un facteur premier quelconque p et désignons par

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n$$

les nombres donnés disposés dans un ordre tel que les exposants

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

dont le facteur p est affecté dans ces nombres, soient rangés par ordre de grandeur *décroissante,* c'est-à-dire que l'on ait

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_n. \tag{1}$$

Le facteur p entrera dans le produit

$$D^{\omega_1}(\pi_{n-3})\, D^{\omega_2}(\pi_{n-4})\, D^{\omega_3}(\pi_{n-5})\, D^{\omega_4}(\pi_{n-6}) \ldots D^{\omega_{n-3}}(\pi_1)$$

avec un exposant de la forme

$$e = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + s_3\alpha_3 + \ldots + s_i\alpha_i + \ldots + s_n\alpha_n,$$

et dans le produit P_4 avec un exposant de la forme

$$e' = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3 + \ldots + t_i\alpha_i + \ldots + t_n\alpha_n,$$

et tout revient à démontrer que $e = e'$.

Pour cela il suffit de démontrer d'une façon générale que $s_i = t_i$.

Occupons-nous d'abord de e. On voit immédiatement que l'exposant de p dans le plus grand commun diviseur $D(\pi_k)$ des produits obtenus en combinant les nombres k à k n'est autre que l'exposant de p dans le produit fourni par la dernière combinaison, puisque, en vertu de l'inégalité (1), ce produit est celui où la somme des exposants de p est la plus faible.

L'exposant de p sera donc :

Dans

$$\begin{aligned} &D(\pi_{n-1})\ldots \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_n, \\ &D(\pi_{n-2})\ldots \quad \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_n, \end{aligned}$$

Dans

$$\begin{aligned} &D(\pi_{n-3})\ldots \quad \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_n, \\ &D(\pi_{n-4})\ldots \quad \alpha_5 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_n, \\ &D(\pi_{n-5})\ldots \quad \alpha_6 + \ldots + \alpha_n, \\ &\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots, \\ &D(\pi_1)\ldots \quad \alpha_n. \end{aligned}$$

Il résulte de ce Tableau que les exposants α_1, α_2, α_3 n'entreront pas dans le produit

$$D^{\omega_1}(\pi_{n-3})\, D^{\omega_2}(\pi_{n-4})\, D^{\omega_3}(\pi_{n-5})\, D^{\omega_4}(\pi_{n-6})\ldots D^{\omega_{n-3}}(\pi_1).$$

L'exposant α_4 y entrera avec le coefficient ω_1 qui est l'exposant de D dans $D^{\omega_1}(\pi_{n-3})$:

L'exposant α_5 y entrera avec le coefficient $\omega_1 + \omega_2$,

» α_6 » » $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$,

» α_7 » » $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$.

D'une façon générale, l'exposant α_i y entrera avec un coefficient égal à la somme des $(i-3)$ premiers nombres figurés du deuxième ordre ; ou, ce qui revient au même,

avec un exposant égal au $(i-3)^{\text{ième}}$ nombre figuré du troisième ordre.

Mais on sait que le $i^{\text{ième}}$ nombre figuré de l'ordre n est C^n_{n+i-1}. En remplaçant dans cette formule i par $i-3$ et n par 3, on voit que le $(i-3)^{\text{ième}}$ nombre figuré du troisième ordre est

$$C^3_{3+i-3-1} = C^3_{i-1}.$$

Le coefficient de α_i dans e est donc

$$s_i = C^3_{i-1}. \tag{2}$$

Passons maintenant à l'exposant e' avec lequel le facteur premier p entre dans P_4, c'est-à-dire dans le produit des plus grands communs diviseurs des groupes obtenus en combinant quatre à quatre les n nombres donnés.

Pour cela, remarquons que les plus grands communs diviseurs des groupes qui se terminent par a_i renferment tous le facteur p avec l'exposant α_i qui est l'exposant minimum de p dans les nombres de chacun de ces groupes; tandis que les plus grands communs diviseurs des groupes qui ne se terminent pas par a_i contiennent p avec un exposant minimum qui est différent de α_i.

Le nombre des facteurs du produit P_4 dans lesquels le facteur premier p entrera avec l'exposant α_i est donc égal au nombre des groupes de quatre termes qui se terminent par a_i. Or ce nombre est évidemment égal au nombre des combinaisons que l'on peut former en prenant trois à trois les $(i-1)$ nombres qui précèdent a_i.

Le facteur p entrera donc avec l'exposant α_i dans C^3_{i-1} facteurs de P_4.

Le coefficient de α_i dans e' est donc

$$t_i = C^3_{i-1}. \tag{3}$$

Mais nous avons déjà trouvé

$$s_i = C^3_{i-1}. \tag{2}$$

Donc on a

$$s_i = t_i,$$

et le théorème est démontré.

On démontrerait de la même manière la formule (XVIII). On peut, d'ailleurs, la déduire de la formule (XVII), au moyen des formules de corrélation, en appliquant la formule (XVII) aux inverses $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}$, et en remarquant que le plus grand commun diviseur des inverses de n nombres est égal à l'inverse du plus plus petit multiple commun de ces nombres.

Corollaire. — En attribuant successivement à r les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$, la formule (XVII) donne

$$\begin{aligned}
P_2 &= D(\pi_{n-1})\, D(\pi_{n-2})\, D(\pi_{n-3})\, D(\pi_{n-4})\, D(\pi_{n-5})\ldots,\\
P_3 &= \qquad D(\pi_{n-2})\, D^2(\pi_{n-3})\, D^3(\pi_{n-4})\, D^4(\pi_{n-5})\ldots,\\
P_4 &= \qquad\qquad D(\pi_{n-3})\, D^3(\pi_{n-4})\, D^6(\pi_{n-5})\ldots,\\
P_5 &= \qquad\qquad\qquad D(\pi_{n-4})\, D^4(\pi_{n-5})\ldots,\\
P_6 &= \qquad\qquad\qquad\qquad D(\pi_{n-5})\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad D(\pi_1),
\end{aligned}$$

d'où, en faisant, membre à membre, le produit alterné

$$P_2 P_3^{-1} P_4 P_5^{-1} \ldots P_n^{(-1)^n} = D(\pi_{n-1}). \tag{1}$$

Mais on sait que

$$\left\{\begin{aligned}
m(a,b,c,\ldots,l) &= \frac{P}{D\left(\frac{P}{a}, \frac{P}{b}, \frac{P}{c}, \ldots, \frac{P}{l}\right)}\\
&= \frac{P}{D(\pi_{n-1})}\\
&= \frac{P_1}{D(\pi_{n-1})}.
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

On a donc

$$m(a,b,c,\ldots,l)=P_1P_2^{-1}P_3P_4^{-1}\ldots P_n^{(-1)^{n+1}},$$

et l'on retrouve ainsi la formule du théorème IV.

III.

NOTE SUR LES CODIVISEURS ET LES COMULTIPLES DES NOMBRES IRRATIONNELS.

Étant donnés n nombres irrationnels, ou n nombres dont quelques-uns sont irrationnels, nous supposerons toujours que tous ces nombres ont été réduits au même indice.

Décomposition d'un nombre irrationnel en facteurs premiers. — Tout nombre réel irrationnel est un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs. Ainsi

$$\sqrt[3]{360}=\sqrt[3]{2^3\times 3^2\times 5}=2\times 3^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{28}{45}}=\sqrt[3]{2^2\times 3^{-2}\times 5^{-1}\times 7}=2^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{2}{3}}\times 5^{-\frac{1}{3}}\times 7^{\frac{1}{3}}.$$

Multiples. — En conservant le sens attribué au mot *multiple* pour les nombres commensurables, nous dirons qu'un nombre irrationnel est multiple d'un autre quand il est égal au produit de cet autre par un nombre entier.

Ainsi $\sqrt[3]{144}$ est un multiple de $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, car

$$\sqrt[3]{144}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\times 6.$$

LEMME. — *Pour qu'un nombre irrationnel* $\sqrt[q]{A}$ *soit divisible par un nombre irrationnel* $\sqrt[q]{B}$, *il faut et il suffit que chaque facteur premier entre dans* A *avec un*

exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans B, *et que la différence de ces exposants soit un multiple de l'indice q.*

En effet, soit p un facteur premier quelconque, et soient α et β les exposants *entiers,* positifs, négatifs ou nuls avec lesquels ce facteur entre dans les nombres positifs commensurables A et B. Le facteur p entrera dans le quotient $\sqrt[q]{A} : \sqrt[q]{B}$ avec l'exposant $\frac{\alpha - \beta}{q}$. Donc, pour que ce quotient soit un nombre entier, il faut et il suffit que l'exposant $\frac{\alpha - \beta}{q}$ soit un nombre entier, positif ou nul, ou, en d'autres termes, que α soit supérieur ou égal à β, et que la différence $\alpha - \beta$ soit un multiple de q.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Condition pour que n nombres irrationnels

$$\sqrt[q]{a},\quad \sqrt[q]{b},\quad \sqrt[q]{c},\quad \ldots,\quad \sqrt[q]{l}$$

aient un codiviseur ou un comultiple.

Soit p un facteur premier quelconque, et soient

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_n$$

les exposants *entiers,* positifs, négatifs ou nuls, rangés par *ordre de grandeur croissante,* dont le facteur p est affecté dans les nombres positifs commensurables

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad l.$$

Considérons maintenant un nombre irrationnel $\sqrt[q]{X}$, et désignons par x l'exposant *entier*, positif, négatif ou nul avec lequel le facteur p entre dans le nombre positif commensurable X.

Pour que $\sqrt[q]{X}$ soit un codiviseur des nombres irrationnels donnés, il faut et il suffit, d'après le lemme,

que l'on ait

$$1^\circ \qquad x \leq \alpha_1,$$

$$2^\circ \qquad x \equiv \alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \ldots \equiv \alpha_n \pmod{q}.$$

La dernière condition exige que les exposants, avec lesquels un facteur premier quelconque p entre dans les nombres placés sous le signe $\sqrt{\ }$, soient congrus entre eux, par rapport à l'indice, ce qui n'arrivera que dans des cas tout à fait exceptionnels.

On peut donc dire que, *généralement, n* nombres irrationnels n'ont pas de codiviseur. On verrait de même que *généralement,* ils n'ont pas de comultiple.

Toutefois, lorsque la condition de congruence est remplie par les exposants de chacun des facteurs premiers qui entrent dans la composition des nombres placés sous le signe $\sqrt{\ }$, les conditions pour que $\sqrt[q]{X}$ soit un codiviseur des nombres

$$\sqrt[q]{a}, \quad \sqrt[q]{b}, \quad \sqrt[q]{c}, \quad \ldots, \quad \sqrt[q]{l},$$

se réduisent aux suivantes

$$1^\circ \qquad x \leq \alpha_1,$$

$$2^\circ \qquad x \equiv \alpha_1 \pmod{q}.$$

Ces conditions étant satisfaites, le codiviseur $\sqrt[q]{X}$ aura sa valeur *maxima* lorsque x sera égal à α_1, c'est-à-dire quand on aura $\frac{x}{q} = \frac{\alpha_1}{q}$.

Il résulte de là que, lorsque les exposants satisferont à la condition de congruence, on formera le plus grand commun diviseur de n nombres irrationnels *en formant le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres et en affectant chacun de ces facteurs de son plus faible exposant.*

Dans le même cas, on formera le plus petit commun multiple *en faisant le produit de tous les facteurs premiers et en affectant chacun d'eux de son plus fort exposant.*

Ainsi donc, dans ce cas, la loi de formation du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple est la même pour les nombres irrationnels et pour les nombres commensurables, d'où il résulte que les propriétés sont aussi les mêmes. Mais, *avant d'appliquer ces propriétés aux nombres irrationnels, il faudra toujours s'assurer que les exposants, dont chaque facteur premier est affecté dans les nombres placés sous le signe* $\sqrt{\ }$, *sont congrus entre eux par rapport à l'indice.*

On peut lever cette restriction en élargissant le sens donné au mot *multiple*.

Au lieu de dire qu'un nombre est multiple d'un autre quand il est égal au produit de cet autre par un nombre entier, il suffirait de dire qu'un nombre est multiple d'un autre quand il est égal à cet autre multiplié par un produit de facteurs premiers affectés d'exposants positifs.

Cette nouvelle définition est acceptable, car, appliquée aux nombres commensurables, elle conduit à l'ancienne qu'elle renferme ainsi comme cas particulier.

En effet, si un nombre commensurable A est égal à un nombre commensurable B multiplié par un produit C composé de facteurs premiers affectés d'exposants positifs, ces exposants sont nécessairement *entiers*, car chacun d'eux est égal à la différence des deux exposants *entiers* avec lesquels un même facteur premier entre dans les nombres commensurables A et B. Le produit C est donc un nombre entier. C. Q. F. D.

Si l'on accepte cette nouvelle définition du mot *multiple,* on voit, en se reportant à la démonstration du lemme, que, pour que $\sqrt[q]{A}$ soit divisible par $\sqrt[q]{B}$, il faut et il suffit que l'exposant $\frac{\alpha-\beta}{q}$ soit positif ou nul, ou, ce qui revient au même, que $\frac{\alpha}{q}$ soit supérieur ou égal à $\frac{\beta}{q}$.

Donc, avec la nouvelle définition, pour que $\sqrt[q]{A}$ soit divisible par $\sqrt[q]{B}$, il faut et il suffit que chaque facteur premier entre dans $\sqrt[q]{A}$ avec un exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans $\sqrt[q]{B}$.

La condition de la divisibilité d'un nombre par un autre est alors la même pour les nombres commensurables et pour les nombres irrationnels, et l'on a le lemme général :

Lemme. — *Pour qu'un nombre, commensurable ou irrationnel, soit divisible par un autre nombre, commensurable ou irrationnel, il faut et il suffit que chaque facteur premier entre dans le premier nombre avec un exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans le second.*

Le lemme étant ainsi généralisé, toutes les propriétés qui en découlent le sont aussi du même coup et s'appliquent aussi bien aux nombres irrationnels qu'aux nombres commensurables. Il faut en excepter toutefois celles qui exigent que les quotients obtenus en divisant des nombres par leur plus grand commun diviseur (ou un plus petit commun multiple par les nombres) soient des nombres entiers. Tel est le cas du deuxième corollaire du théorème II.

On remarquera que la loi de formation déduite du

lemme, donne pour les nombres irrationnels

$$D(\sqrt[q]{a}, \sqrt[q]{b}, \ldots, \sqrt[q]{l}) = \sqrt[q]{D(a, b, \ldots, l)},$$
$$m(\sqrt[q]{a}, \sqrt[q]{b}, \ldots, \sqrt[q]{l}) = \sqrt[q]{m(a, b, \ldots, l)}.$$

EXERCICES.

Dans tous ces exercices, les lettres $a, b, c, \ldots, l$ représentent des nombres quelconques entiers ou fractionnaires. Quelques-unes des identités proposées deviendraient immédiatement évidentes si les nombres étaient entiers.

Exercice I. — Dans les formules du théorème II, on peut permuter deux lettres de même indice, A_2 et B_2 par exemple, et écrire

$$D(A_1, B_2, A_3, \ldots, A_n).m(B_1, A_2, B_3, \ldots, B_n) = C.$$

Exercice II. — Si l'on a

$$A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_nB_n,$$

on a

$$D(A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n) \times m(A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n) = D(A_1, A_2, \ldots, A_n).m(B_1, B_2, \ldots, B_n).$$

Exercice III. — Si l'on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = \frac{l}{l'},$$

on a

$$\frac{D(a, b, c', \ldots, l)}{D(a', b', c', \ldots, l')} = \frac{m(a, b, c, \ldots, l)}{m(a', b', c', \ldots, l')} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \ldots.$$

Exercice IV. — Si les nombres a, b, c, d forment une proportion, les nombres $D(a, b)$, $m(a, b)$, $D(c, d)$, $m(c, d)$, forment aussi une proportion.

Exercice V. — Si les nombres a, b, c, $\ldots$, l sont en progression géométrique, on a

$$D(a, b, c, \ldots, l).m(a, b, c, \ldots, l) = al.$$

Exercice VI. — On a

$$D(1, a, a^2) = D^2(1, a).$$

En généralisant, on a

$$D(1, a, a^2, \ldots, a^n) = D^n(1, a);$$

on a de même

$$m(1, a, a^2, \ldots, a^n) = m^n(1, a).$$

Exercice VII. — Si les trois côtés et les trois hauteurs d'un triangle ont une commune mesure, on a

$$S = \frac{1}{2} D(a, b, c).m(h, h', h'').$$

Exercice VIII. — On a

$$D\left(1, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right) = \frac{D(a, b)}{m(a, b)},$$

$$m\left(1, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right) = \frac{m(a, b)}{D(a, b)}.$$

Exercice IX. — On a

$$\frac{D(a, b, c)}{m(a, b, c)} = D\left[\frac{D(a, b)}{m(a, b)}, \frac{D(a, c)}{m(a, c)}, \frac{D(b, c)}{m(b, c)}\right],$$

$$\frac{m(a, b, c)}{D(a, b, c)} = m\left[\frac{m(a, b)}{D(a, b)}, \frac{m(a, c)}{D(a, c)} = \frac{m(b, c)}{D(b, c)}\right].$$

Exercice X. — En transformant

$$D(abc, abd, acd, bcd),$$

on obtient

$$D(abc, abd, acd, bcd) = D(a, b).D(c, d).D[m(a, b), m(c, d)].$$

En continuant les transformations, on arrive à la formule connue

$$m(a, b, c, d) = \frac{abcd}{D(abc, abd, acd, bcd)}.$$