

E. BARISIEN

Sur les podaires successives d'une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 157-164

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__157_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE [suite (1)];

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN.

Aire des anti-podaires successives de la courbe donnée. — Si nous désignons sous le nom d'*anti-podaire* une courbe telle que sa podaire soit la courbe donnée, nous voyons que pour construire le point P_{-1} de la première anti-podaire, il suffit de mener en O une droite faisant avec OM le même angle que OM fait avec OP_1 et d'élever en M une perpendiculaire à OM. Le point de rencontre de ces deux droites donne le point P_{-1} . Si r_{-1} et θ_{-1} sont les coordonnées polaires de ce point, on a

$$\theta - \theta_{-1} = \theta_1 - \theta = V - \frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$\frac{d\theta_{-1}}{d\theta} = 1 - \frac{dV}{d\theta} = 1 - \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

On a aussi

$$r_{-1} = \frac{r}{\sin V} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

(1) Voir même Tome, p. 89.

Donc, on a pour la différentielle de l'aire U_{-1} de la première anti-podaire

$$(13) \quad \frac{dU_{-1}}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2_1 \frac{d\theta_{-1}}{d\theta} = \frac{1}{2} (r^2 + rr'').$$

Généralisons cette formule et cherchons l'aire de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. Si θ_{-m} et r_{-m} sont les coordonnées du point correspondant de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire, on a

$$\theta_{-m} = \theta - m(\theta_1 - \theta) = \theta - m \left(V - \frac{\pi}{2} \right).$$

D'où

$$\frac{d\theta_{-m}}{d\theta} = 1 - m \frac{dV}{d\theta} = 1 - m \left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} \right).$$

De plus,

$$r_{-m} = \frac{r^{-(m-1)}}{\sin V} = \frac{r}{\sin^m V} = r \left(\frac{r^2 + r'^2}{r^2} \right)^{\frac{m}{2}}.$$

On a donc, pour l'aire U_{-m} ,

$$(14) \quad \frac{dU_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{r^2 + r'^2}{r^2} \right)^m \left[1 - m \left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} \right) \right].$$

Rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. — En conduisant le calcul comme pour le rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ podaire, on trouve

$$(15) \quad R_{-m} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{m+1}{2}}}{r^m} \left[\frac{r^2 + r'^2 - m(r'^2 - rr'')}{r^2 + r'^2 - (m-1)(r'^2 - rr'')} \right].$$

En fonction de l'angle V et de R_0 , on a aussi

$$R_{-m} = \frac{r}{\sin^{m+1} V} \left[\frac{(m+1)R_0 \sin V - mr}{mR_0 \sin V - (m-1)r} \right].$$

On en déduit les formules analogues à celles de

M. Husquin de Rhéville

$$\begin{aligned} R_{-1} &= \frac{r}{R_0 \sin^3 V} (2 R_0 \sin V - r), \\ R_{-2} &= \frac{r}{\sin^3 V} \left(\frac{3 R_0 \sin V - 2 r}{2 R_0 \sin V - r} \right), \\ R_{-3} &= \frac{r}{\sin^3 V} \left(\frac{4 R_0 \sin V - 3 r}{3 R_0 \sin V - 2 r} \right), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On a donc aussi

$$R_{-1} R_{-2} R_{-3} \dots R_{-m} = \frac{r^m}{R_0 \sin^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} V} [(m+1) R_0 \sin V - m r],$$

et, par suite, pour le produit des rayons de courbure des m premières podaires et des m premières anti-podaires,

$$\begin{aligned} &(R_1 R_2 R_3 \dots R_m) (R_{-1} R_{-2} R_{-3} \dots R_{-m}) \\ &= \frac{r^{2m+1} \sin^{m-1} V}{R_0} \left[\frac{(m+1) R_0 \sin V - m r}{(m+1) r - m R_0 \sin V} \right]. \end{aligned}$$

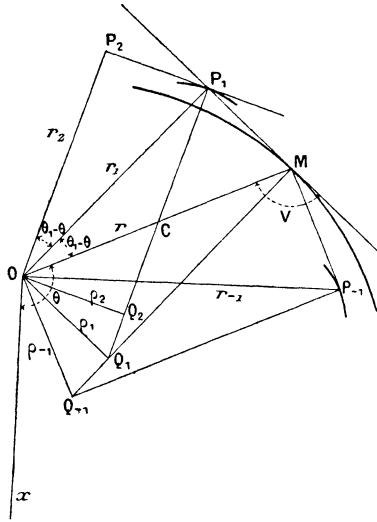
Rectification de la m^{ième} anti-podaire.— On trouve

$$(16) \quad \frac{ds_{-m}}{d\theta} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{m-1}{2}}}{r^m} [r^2 + r'^2 - m(r'^2 - r r'')].$$

Si maintenant nous construisons le quatrième sommet Q_{-1} du rectangle dont les trois autres sommets sont les points O , M et P_{-1} , et si nous abaïssons la perpendiculaire OQ_1 sur la diagonale MQ_{-1} , les courbes lieux des points tels que Q_1 et Q_{-1} seront intéressantes à étudier au point de vue de la détermination de leurs aires.

La courbe décrite par Q_1 est la *podaire de la développée de la courbe fondamentale* et la courbe lieu du

point Q_{-1} est la *podaire de la développée de la première anti-podaire*.



Cherchons donc les aires de ces deux genres de courbes.

Aire de la podaire de la développée de la courbe. — Soient ρ_1 et ω_1 les coordonnées du point Q_1 , W_1 l'aire de cette courbe. Alors

$$\frac{dW_1}{d\theta} = \frac{1}{2} \rho_1^2 \frac{d\omega_1}{d\theta}.$$

Or,

$$\omega_1 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}.$$

En différentiant par rapport à θ et tenant compte de (3), il vient

$$\frac{d\omega_1}{d\theta} = \frac{d\theta_1}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

D'autre part

$$\rho_1 = -r \cos V = -\frac{rr'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Par suite,

$$(17) \quad \frac{dW_1}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{r^2 r'^2}{(r^2 + r'^2)^2} (r^2 + 2r'^2 - rr'').$$

Aire de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ podaire. — On trouve, en appelant ρ_m et ω_m les coordonnées du point Q_m et W_m l'aire de la courbe Q_m ,

$$\frac{dW_m}{d\theta} = \frac{1}{2} \rho_m^2 \frac{d\omega_m}{d\theta}.$$

Or,

$$\frac{d\omega_m}{d\theta} = \frac{d\theta_m}{d\theta},$$

$$\rho_m = -r \cos V \sin^{m-1} V.$$

Par conséquent,

$$(18) \quad \frac{dW_m}{d\theta} = \frac{1}{2} r'^2 \left(\frac{r^2}{r^2 + r'^2} \right)^m \left[1 + m \left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} \right) \right].$$

Aire de la podaire de la développée de la $m^{ième}$ anti-podaire. — Si W_{-m} est l'aire de cette courbe et si ρ_{-m} et ω_{-m} sont les coordonnées du point Q_{-m} , on a

$$\frac{dW_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2} \rho_{-m}^2 \frac{d\omega_{-m}}{d\theta}.$$

Mais

$$\omega_{-m} = \theta_{-(m-1)} - \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\frac{d\omega_{-m}}{d\theta} = \frac{d\theta_{-(m-1)}}{d\theta} = 1 - (m-1) \frac{dV}{d\theta}.$$

De plus

$$\rho_{-m} = -r_{-(m-1)} \cot V = -\frac{r \cos V}{\sin^m V}.$$

Par conséquent

$$(19) \quad \frac{dW_{-m}}{d\theta} = \frac{1}{2} r'^2 \left(\frac{r^2 + r'^2}{r^2} \right)^{m-1} \left[1 - (m-1) \left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} \right) \right].$$

En faisant $m = 1$ dans cette formule, on a

$$(20) \quad \frac{dW_{-1}}{d\theta} = \frac{1}{2} r'^2.$$

Il est à remarquer aussi que l'on a

$$\rho_{-1} = -r'.$$

APPLICATIONS.

Nous allons appliquer ces formules à des cas particuliers et en déduire quelques résultats intéressants.

I. — APPLICATION A L'ELLIPSE ET A SES PODAIRES DU CENTRE.

Si l'on prend pour équation de l'ellipse

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta},$$

on trouve

$$\begin{aligned} r'^2 &= \frac{a^2 b^2 c^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^3}, \\ r'^2 - rr'' &= \frac{a^2 b^2 c^2 (b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta)}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^3}, \\ r^2 + r'^2 &= \frac{a^2 b^2 (a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta)}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^3}, \\ r^2 + 2r'^2 - rr'' &= \frac{a^4 b^4}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^3}. \end{aligned}$$

Aire de la première podaire. — On sait que cette podaire a pour équation

$$r_1^2 = a^2 \cos^2 \theta_1 + b^2 \sin^2 \theta_1$$

et pour aire

$$U_1 = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2).$$

Néanmoins recherchons cette aire par le procédé que nous avons indiqué, afin de la généraliser pour la po-
daire d'ordre m .

L'emploi de la formule (4) donne

$$\frac{dU_1}{d\theta} = \frac{a^4 b^4}{2} \frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}{(a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta)^2}.$$

Donc, l'aire totale est

$$U_1 = 2 a^4 b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) d\theta}{(a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta)^2}.$$

Afin d'intégrer facilement, remarquons que, si l'on pose pour abrégé

$$a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta = A,$$

on a l'identité

$$a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta = \frac{A + a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Il vient donc

$$U_1 = \frac{2 a^4 b^4}{a^2 + b^2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A} + a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A^2} \right).$$

En posant $\tan \theta = u$, on est ramené à des intégrales connues de la forme $\int_0^\infty \frac{du}{(a^4 u^2 + b^4)^p}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A} &= \int_0^\infty \frac{du}{a^4 u^2 + b^4} = \frac{\pi}{2 a^2 b^2}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A^2} &= \int_0^\infty \frac{du (1 + u^2)}{(a^4 u^2 + b^4)^2} \\ &= \frac{1}{a^4} \int_0^\infty \frac{du}{a^4 u^2 + b^4} - \frac{b^4}{a^4} \int_0^\infty \frac{du}{(a^4 u^2 + b^4)^2} = \frac{\pi(a^4 + b^4)}{4 a^6 b^6}. \end{aligned}$$

(164)

On trouve, par suite, après réduction facile,

$$U_1 = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2).$$

Aire de la mième podaire de l'ellipse. — On trouve par l'application de la formule (7)

$$\begin{aligned} U_m = 2ma^4b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{2m-1}}{(a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta)^{m+1}} d\theta \\ - 2(m-1)a^2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{2m-1}}{(a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta)^m} d\theta. \end{aligned}$$

Ces intégrales, comme pour le calcul de U_1 , sont toujours ramenables à des intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{(a^4u^2 + b^4)^p}.$$

En posant successivement

$$u = \frac{b^2}{a} \tan \varphi,$$

on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{du}{(a^4u^2 + b^4)^p} &= \frac{1}{a^2b^{4p-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-2} \varphi \\ &= \frac{1}{a^2b^{4p-2}} \frac{1.3.5 \dots (2p-3)}{2.4.6 \dots (2p-2)} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On trouve ainsi pour les quatre premières podaires

(Ellipse).

$$U_0 = \pi ab,$$

$$U_1 = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2),$$

$$U_2 = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2) + \frac{\pi c^4}{4(a^2 + b^2)},$$

$$U_3 = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2) + \frac{7\pi c^4}{16(a^2 + b^2)} + \frac{\pi c^4 a^2 b^2}{4(a^2 + b^2)^3},$$

$$U_4 = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2) + \frac{19\pi c^4}{32(a^2 + b^2)} + \frac{\pi c^4 a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^3} + \frac{\pi c^4 a^4 b^4}{2(a^2 + b^2)^5},$$

(A suivre).