André Cazamian

Sur le problème du concours général de 1893

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 92-97

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__92_0>

SUR LE PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1893;

Par M. André CAZAMIAN,

Élève de Mathématiques spéciales au Collège Sainte-Barbe.

On donne une conique S *et un triangle conjugué* ABC.

1° *Démontrer que, par un point quelconque* P, *de* S, *passent quatre coniques circonscrites à* ABC *et touchant* S *chacune en un point autre que* P.

2° *Les points où ces quatre coniques touchent* S *sont situés sur une conique* Σ *circonscrite à* ABC.

3° *Quand* P *décrit* S, Σ *enveloppe une courbe* T *du quatrième ordre.*

4° *D'un point* M *de la courbe* T, *on peut mener à cette courbe quatre tangentes, autres que celle qui touche la courbe en* M. *Démontrer que les points de contact sont sur une droite* D; *trouver l'enveloppe de* D *quand le point* M *décrit la courbe* T.

En prenant le triangle ABC comme triangle de référence, et

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 = 0$$

pour équation de la conique conjuguée S, on trouve que l'équation de la courbe T, enveloppe de Σ, est

$$A y^2 z^2 + A' x^2 z^2 + A'' x^2 y^2 = 0.$$

La courbe T est donc une quartique pour laquelle les trois sommets A, B, C du triangle de référence sont des points doubles d'inflexion.

En cherchant maintenant l'enveloppe de la droite D qui contient les quatre points de contact des tangentes à T issues d'un point M de la courbe, on est conduit, en suivant une marche parallèle, à l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0,$$

c'est-à-dire qu'on retrouve la conique donnée S.

Nous allons expliquer ce résultat en montrant que le problème peut se diviser en deux parties dont l'une n'est que la transformation de l'autre.

Si l'on se reporte à un Mémoire de Laguerre (*Nouvelles Annales*, août 1878), on verra que, pour toutes les quartiques Q ayant trois points doubles d'inflexion, quartiques dont les équations, en les rapportant au triangle de référence ayant les trois points doubles pour sommets, peuvent se ramener à la forme

$$Ay^2z^2 + A'x^2z^2 + A''x^2y^2 = 0,$$

la cubique polaire d'un point quelconque de la courbe se décompose en une conique et une droite, cette dernière renfermant les quatre points de contact des tangentes issues du point, et l'enveloppe de cette droite, quand le point se déplace sur la courbe, est une conique conjuguée au triangle des points doubles. On reconnaît là l'ensemble des propriétés qu'il s'agissait d'établir dans la dernière partie de la question. Pour en déduire celles de la première partie, appliquons aux résultats ci-dessus énoncés la transformation trilinéaire réciproque connue sous le nom de *transformation par points inverses*. Au point (x, y, z) nous faisons correspondre le point (X, Y, Z), tel que

$$xX = yY = zZ.$$

Nous tirons de là

$$\frac{x}{YZ} = \frac{y}{XZ} = \frac{z}{XY}$$

et

$$\frac{X}{yz} = \frac{Y}{xz} = \frac{Z}{xy}.$$

Pour avoir l'équation de la transformée, il suffira de remplacer x, y, z par les valeurs proportionnelles YZ, XZ, XY. On voit ainsi qu'à la quartique T

$$Ay^2z^2 + A'x^2z^2 + A''x^2y^2 = 0$$

correspond la courbe

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 = 0 :$$

c'est la conique S conjuguée au triangle de référence.

A toute droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

correspond la courbe

$$\alpha YZ + \beta XZ + \gamma XY = 0,$$

qui est une conique circonscrite au triangle de référence.

On voit ainsi :

1° Que, par un point quelconque P, de S, passent quatre coniques circonscrites à ABC (transformées des tangentes qu'on peut mener du point correspondant à la quartique T) et touchant S chacune en un point autre que P;

2° Que les points de tangence sont situés sur une conique Σ circonscrite à ABC dont l'enveloppe, quand P se déplace sur S, est la quartique T.

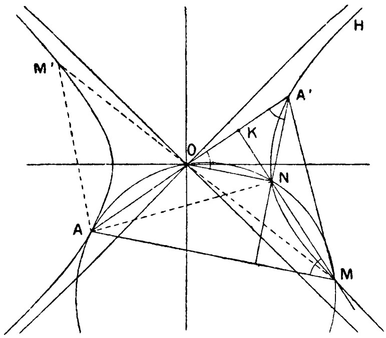
Supposons maintenant que nous effectuions une transformation homographique de la figure donnée, amenant les points B et C aux points circulaires à l'infini du plan, I et J. Le point A, pôle de BC par rapport à S, devient le pôle de la droite de l'infini, c'est-à-dire le centre de la conique H transformée de S; de plus, cette conique étant conjuguée par rapport au triangle OIJ, est une hyperbole équilatère. La première partie du problème, ainsi transformée, conduit à l'énoncé suivant :

Si, par un point quelconque M *d'une hyperbole équilatère et le centre* O *de la courbe, on mène les quatre cercles tangents à l'hyperbole en des points autres que* M, *les quatre points de contact sont sur un cercle passant par* O. *L'enveloppe de ce cercle est une quartique bicirculaire.*

Inversement, si nous démontrons directement cette propriété, nous pourrons considérer toute la question comme résolue.

Remarquons d'ailleurs que, pour arriver à l'énoncé précédent, nous avons fait subir à la propriété des quartiques Q d'abord une transformation par points inverses, puis une transformation homographique, mais nous aurions pu d'abord transformer homographiquement de façon que deux points doubles de la quartique devinssent les points I et J, et alors cette dernière se serait transformée en une *lemniscate,* comme il est aisé de le voir sur son équation, puis faire une transformation par points inverses qui, dans le cas où le triangle de référence n'a qu'un sommet à distance finie (le point double de la lemniscate), les deux autres étant les points cycliques, n'est pas autre chose qu'une transformation par rayons vecteurs réciproques. Cette dernière aurait transformé la lemniscate en une hyperbole équilatère H ayant pour centre le point double, et les tangentes à la lemniscate seraient devenues des cercles passant par le centre et tangents à l'hyperbole H.

Soient donc H une hyperbole équilatère, et MNOA un cercle passant par le centre de la courbe, la touchant en A et la rencontrant en deux autres points M et N, l'un de ces points, M, étant supposé fixe. Soit A′ le sy-



métrique du point A sur l'hyperbole. Je dis que $MO = MA'$.

On voit d'abord que MN est une hauteur du triangle AMA′, car les deux droites MN et AOA′ sont, d'après le théorème de Joachimsthal et la propriété des diamètres conjugués de l'hyperbole équilatère, symétriques de la tangente en A, par rapport à deux directions (un axe et une asymptote) faisant entre elles un angle de 45°. Les cercles des neuf points des triangles ANM, AA′M se confondent alors comme ayant trois points communs : le point O, l'hyperbole équilatère étant circonscrite à la fois à ces deux triangles, le pied K de la perpendiculaire MK et le milieu du côté commun AM.

Il résulte de là que le point N est l'orthocentre du triangle AMA′. On a, par conséquent,

$$\widehat{AA'N} = \widehat{AMK},$$

et ce dernier est égal à l'angle ONA′, le quadrilatère AMNO étant inscrit dans la circonférence. Le triangle OAN′, et par suite le triangle OMA′ est donc isoscèle.

Il en sera de même du triangle OM'A, M' étant le symétrique de M sur l'hyperbole équilatère, ce qui prouve que le point de contact A appartient à un cercle C passant par O et ayant pour centre le point M'. Les quatre points de contact sont sur ce cercle.

Si nous supposons maintenant que le point M parcoure l'hyperbole équilatère, le cercle C, qui passe constamment par O, et dont le centre décrit aussi l'hyperbole, enveloppera une lemniscate, homothétique de la podaire du centre O de l'hyperbole équilatère dans le rapport 2.