NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1894)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 503-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__503_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1894).

Mathématiques élémentaires.

On considère un quadrilatère Q de sommets A, B, C, D, dont les diagonales se coupent en un point O, et les cercles circonscrits aux triangles OAB, OBC, OCD et ODA. Les centres O_1, O_2, O_3, O_4 de ces cercles sont les sommets d'un parallélogramme P.

1° Le parallélogramme P étant donné, démontrer que tous les quadrilatères Q qui lui correspondent ont une surface constante et des diagonales de longueur constante.

2° Le parallélogramme P étant donné et le point O étant assujetti à décrire une droite Δ, prouver que les sommets du quadrilatère Q se déplacent sur les côtés d'un parallélogramme P'; étudier la déformation de P' quand Δ varie; trouver les positions de la droite Δ pour lesquelles le parallélogramme P' a une surface maximum.

3° Construire le quadrilatère Q, connaissant le parallélogramme P et soit deux angles de Q, soit les rapports $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{CB}{CD}$. Discuter.

4° On suppose que le quadrilatère Q soit inscriptible; connaissant le parallélogramme P, trouver le lieu des sommets de Q et le lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère. (Ces lieux sont des coniques.)

Mathématiques spéciales.

On considère toutes les hyperboles équilatères H qui déterminent sur l'axe Oy des segments variables ayant leur milieu au point O, et qui divisent harmoniquement un segment fixe AB porté par l'axe Ox perpendiculaire à l'axe Oy. On désignera par a, b les abscisses des points A et B.

1° Prouver qu'il y a dans le plan xOy une infinité de segments MM' divisés harmoniquement par toutes les hyperboles H; les extrémités M, M' de ces segments sont chacune le centre d'une hyperbole H réduite à deux droites.

2° Les extrémités M, M' d'un même segment sont les foyers d'une conique tangente en O à l'axe Ox et tangente en des points variables aux parallèles à l'axe Oy issues des points A et B.

3° Trouver le lieu des milieux des segments MM' et le lieu S de leurs extrémités M et M'.

4° Montrer que ce dernier lieu S est une courbe que l'on peut définir comme l'enveloppe de quatre familles de cercles qui touchent chacun la courbe en deux points. Trouver le lieu des centres de ces cercles et prouver que la courbe S peut se reproduire de trois manières par inversion.

5° Aux extrémités M, M′ de chaque segment divisé harmoniquement par les hyperboles H on mène les tangentes à la courbe S; trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Première question. — On considère l'intégrale

$$V = \int_1^z \frac{(1+z+z^3)\,dz}{z^2(1+z)\sqrt{a^2+z^2}},$$

obtenue en allant du point (1) au point (z) par un chemin quelconque, la valeur initiale du radical pour $z = 1$ étant $+\sqrt{a^2+1}$, et a désignant un nombre *commensurable*.

1° Indiquer la nature des points singuliers de l'intégrale V;

2° Calculer les périodes de cette intégrale;

3° Montrer que, pour une infinité de valeurs de a, le nombre des périodes se réduit à un; indiquer la méthode à suivre pour obtenir l'expression générale de ces valeurs de a.

Deuxième question. — Les variables complexes u et z étant liées par la relation

$$u^2 = 1 + z^6,$$

on considère l'intégrale

$$W = \int_1^z \frac{P(z,u)\,dz}{z^2 u}$$

dans laquelle $P(z, u)$ désigne un polynome entier en z et u.

Trouver la forme que doit avoir ce polynome :

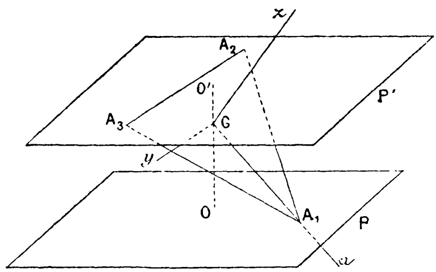
1° Pour que l'intégrale W soit finie en tous les points du plan des z à distance finie ou infinie, quelle que soit la détermination adoptée pour u, excepté au point $z = 0$, la valeur *correspondante* de u étant $+1$;

2° Pour que le résidu de W relatif à ce point ($z = 0$, $u = +1$) soit égal à $+1$.

3° Le polynome $P(z, u)$ satisfaisant aux conditions précédentes, quel est, en général, le nombre des périodes de l'intégrale W?

Composition de Mécanique rationnelle.

Une plaque homogène pesante infiniment mince, ayant la forme d'un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$, de côté a, repose par le sommet A_1 sur un plan horizontal P sur lequel elle glisse *avec frottement,* tandis que le côté A_2A_3 glisse *sans frottement* sur un plan horizontal P' placé au-dessus du premier.



Le triangle est percé en son centre de gravité G d'une ouverture infiniment petite, dans laquelle passe une tige verticale fixe OO' parfaitement polie : la réaction de cette tige OO' sur le triangle est donc une force horizontale appliquée en G.

Enfin, on suppose le plan du triangle incliné de 45° sur la verticale.

A l'instant $t = 0$, on imprime au triangle, autour de OO', une vitesse angulaire ω_0, dans le sens positif des rotations.

On demande d'étudier le mouvement du système et de calculer les réactions normales des plans P et P' sur le triangle.

1° Montrer que, si la vitesse angulaire initiale ω_0 a une certaine valeur μ, la réaction du plan P sur le sommet A_1 est *nulle.*

2° Indiquer ce qui arrive suivant que ω_0 est inférieur ou supérieur à μ, et suivant que le sommet A_1 peut ou non s'élever au-dessus du plan P.

Nota. — On appellera N_1 la réaction normale du plan P sur le sommet A_1 et l'on remarquera que les réactions normales du plan P' sur le côté A_2A_3 peuvent se réduire à deux forces verticales N_2 et N_3 appliquées aux sommets A_2 et A_3. Si l'on prend pour axes liés au corps solide mobile un axe Gx dirigé suivant GA_1, un axe Gy parallèle à A_2A_3 et un axe Gz normal au plan du triangle et dirigé vers le haut, l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point G est de la forme

$$A(x^2+y^2)+2Az^2=1.$$