NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUDIBERT

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1894

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 491-493

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__491_0>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1894 (1);

PAR M. AUDIBERT.

La droite Δ rencontre, en un point P, le plan mobile $y = mx$. Ce plan coupe la sphère S suivant un méridien et la polaire de P, relative à ce méridien, rapportée à l'axe OZ et à la trace de son plan sur XOY, comme axe des abscisses ξ, a pour équation dans ce plan

$$\xi(bp - aq)\sqrt{1 + m^2} - z(q - pm) - r^2(b - am) = 0,$$

et dans l'espace

$$y = mx,$$
$$x(bp - aq)(1 + m^2) - z(q - pm) - r^2(b - am) = 0,$$

L'équation de Σ est la résultante de l'élimination de m,

$$(1)\quad (aq - bp)(x^2 + y^2) + z(qx - py) - r^2(ay - bx) = 0;$$

elle représente une surface du second degré, réglée et à centre, soit un hyperboloïde à une nappe.

2° On voit d'abord que tout plan parallèle à XOY coupera Σ suivant un cercle. Transportons l'origine à son centre en faisant en même temps pivoter, autour de OX, les axes OY et OZ d'un angle dont la tangente soit $\frac{-q}{p}$, l'équation (1) devient

$$(aq - bp)(x^2 + y^2) + \sqrt{p^2 + q^2}\,xz - \frac{r^4}{4(p^2 + q^2)}(aq - bq) = 0.$$

(1) *Voir* même Tome, p. 296.

Laissant OY fixe et faisant tourner ZOX d'un angle α, l'équation transformée, pour $z = 0$, donne

$$(aq - bp)(y^2 + x^2 \cos^2\alpha)$$
$$+ \sqrt{p^2 + q^2} \sin\alpha \cos\alpha \, x^2 - \frac{r^4}{4(p^2 + q^2)}(aq - bp) = 0,$$

relation qui devient, pour $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{aq - bp}$,

$$y^2 + x^2 = \frac{r^4}{4(p^2 + q^2)}.$$

Tous les plans parallèles à ce cercle donneront une nouvelle série de sections circulaires, faisant avec les premières un angle α.

Revenons au système primitif de coordonnées.

L'origine O centre de S et la droite Δ déterminent le plan

$$qx - py - (aq - bp)z = 0,$$

perpendiculaire en son milieu à la corde de contact des deux plans tangents menés par la droite Δ à la sphère; il est incliné sur XOY de l'angle α et sa trace sur ce plan fait avec OX un angle, dont la tangente est $-\frac{p}{q}$. Toute section qui lui sera parallèle donnera donc un cercle de la seconde série.

3° Concevons un système de coordonnées, parallèle à l'ancien, dont l'origine O_1 est sur l'axe OZ, commun aux deux systèmes $(OO_1 = h)$.

On donne, comme précédemment, une droite Δ_1,

$$x = a_1 z + p, \qquad y = b_1 z + q$$

et la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

L'équation de la surface Σ_1 engendrée ne différera de celle de Σ (1) que par le changement de a en a_1 et de b en b_1; mais, rapportée au système primitif, distant de h, elle deviendra

$$(a_1 q - b_1 p)(x^2 + y^2) + z(qx - py) \\ + x(r^2 b_1 + qh) - y(r^2 a_1 + ph) = 0,$$

et on l'identifiera avec (1) en posant

$$b_1 = \frac{r^2 b - qh}{r^2}, \qquad a_1 = \frac{r^2 a - ph}{r^2}.$$

4° Les équations de Δ_1, rapportées au même système dont on aurait transporté l'origine dans le plan XOY au point $x = p$, $y = q$, seront

$$r^2 x = (r^2 a - ph)(z + h), \qquad r^2 y = (r^2 b - qh)(z + h).$$

Éliminant h, on a l'équation du lieu des positions de Δ_1 quand le point O_1 se déplace sur OZ :

$$(qx - py)^2 = (aq - bp)[z(qx - py) + r^2(bx - ay)];$$

elle représente un paraboloïde hyperbolique.