G. LEINEKUGEL

Note de géométrie. Sur une parabole intimement liée à une conique donnée et à un point donné de son plan

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 482-488

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__482_1>

NOTE DE GÉOMÉTRIE.
SUR UNE PARABOLE INTIMEMENT LIÉE A UNE CONIQUE DONNÉE ET A UN POINT DONNÉ DE SON PLAN;

PAR M. G. LEINEKUGEL,
Élève Ingénieur hydrographe de la Marine.

Nous nous proposons dans cette Note de revenir sur les propriétés remarquables d'une parabole (H) que nous avons rencontrée et étudiée incidemment en traitant à un point de vue purement géométrique la question du concours général de l'année 1889 (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. VIII, juin).

Nous montrerons que certains théorèmes énoncés sur les coniques par M. Godefroy (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. XII; 1893) ont été démontrés dans l'étude de cette parabole (*loc. cit.*). En particulier, la solution de la recherche des points du plan d'une conique qui, après transformation par polaires réciproques (la courbe directrice étant un cercle), donneront les axes de la conique transformée, se trouve renfermée complètement dans l'étude de cette conique.

I. Rappelons, en leur donnant toute la généralité qu'elles comportent, certaines propriétés que nous avons énoncées (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. IX, janvier 1890) au sujet d'une hyperbole équilatère (h). Ce sont les propriétés de cette dernière conique qui conduisent directement, comme nous l'avons montré (*loc. cit.*), à celles de la parabole (H)

Cette hyperbole équilatère (h) peut être considérée comme :

1° *Le lieu des centres du réseau doublement infini des coniques* (c) *du plan qui satisfont à cette condition unique de rencontrer une conique* (p) *donnée, en quatre points équidistants d'un point donné* O;

2° *Le lieu des pieds des normales menées du point* O *à toutes les coniques* (c) *définies comme précédemment;*

3° *Le lieu des milieux des sécantes communes à la conique* (p) *et aux coniques* (c);

4° *Le lieu des sommets des triangles autopolaires communs à la conique* (p) *et aux coniques* (c).

Il est à remarquer que cette hyperbole équilatère (h) reste la même quand, dans les lieux géométriques précédents, on remplace la conique (p) par une quelconque des coniques qui lui sont concentriques et homothétiques.

Si, dans le plan d'une conique (p), on se donne un point O, il existe une conique (h) bien définie qui admet (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. IX) comme tangente en O la perpendiculaire à la polaire de ce point par rapport à la conique (p), qui passe par le centre I de (p), a ses asymptotes parallèles aux axes de (p) et admet pour centre le centre de gravité du quadrilatère formé par les quatre points communs à (p) et à un cercle quelconque de centre O. Nous avons eu l'occasion de montrer à ce sujet la propriété remarquable déduite de là et que nous rappelons :

Tous les quadrilatères formés par les points communs à une série de cercles concentriques (O) *et à une série* *de coniques concentriques et homothétiques à une conique donnée* (p) *ont tous même centre de gravité.*

En transformant cette hyperbole (h) par rapport à un cercle (O) de centre O, on obtient la parabole (H) en question, dont nous résumons les propriétés ; on peut la considérer comme :

1° *L'enveloppe des polaires d'un point* O *par rapport au réseau doublement infini des coniques* (C) *du plan qui satisfont à cette condition unique d'avoir avec une conique donnée* (P) *quatre tangentes communes équidistantes d'un point* O ;

2° *L'enveloppe des tangentes aux pieds des normales menées du point* O *aux coniques* (C) *définies comme précédemment ;*

3° *L'enveloppe des droites menées pour chacun des quadrilatères circonscrits à la conique* (P) *et à une conique* (C) *par chaque sommet et perpendiculairement à la droite qui joint le point* O *à ce sommet ;*

4° *L'enveloppe des côtés des triangles autopolaires communs à la conique* (P) *et aux coniques* (C) ;

5° *L'enveloppe des normales aux coniques* (C) *aux points où leurs tangentes passent par le point donné* O ;

6° *L'enveloppe des axes de toutes les coniques* (C).

Inutile de faire remarquer que la conique (P) est la transformée de la conique (p) par rapport à (O).

La dernière propriété (6°) de (H) nous montre que les axes de (P) sont deux tangentes à cette parabole. Il résulte de là qu'avant la transformation les deux points du plan de la figure, à laquelle appartiennent la conique (p) et le cercle (O), qui donnent les axes de la transformée (P) de (p), sont deux points de l'hyperbole (h). Ces points sont évidemment sur la polaire du point (O) par rapport à (p).

Aussi pouvons-nous formuler cette propriété générale :

Les points du plan qui, dans la transformation par polaires réciproques d'une conique (p) *par rapport à un cercle* (O) *de centre* (O), *donneront les axes de la conique transformée, sont aux points communs à la polaire de* O *par rapport à* (p) *et à l'hyperbole aux pieds des normales issues de ce point* O *relativement à la conique* (p).

Nous voyons, d'après ce qui précède, qu'à tout point O du plan d'une conique (P) correspond une parabole (H), bien définie, de même que précédemment nous avons montré qu'il y avait une hyperbole équilatère intimement liée au point et à la conique. Cette parabole (H) est tangente à la polaire de O par rapport à (P), aux axes de (P), aux normales à la conique (P) aux points où les tangentes à cette conique passent par O, aux tangentes à cette même conique aux points où les normales passent par O, enfin aux parallèles menées du point O aux axes de la polaire réciproque (p) de (P) par rapport à un cercle (O) de centre O.

La directrice de cette parabole (H) (voir *loc. cit.*) est la droite qui joint le point O au centre de (P), c'est-à-dire la perpendiculaire menée de O à la polaire de ce point par rapport à (p) (*voir* lemme III, *loc. cit*).

II. Nous terminerons en proposant au lecteur ces deux questions corrélatives :

1° *Démontrer que toutes les hyperboles équilatères* (h), *qui correspondent dans le plan d'une conique* (p) *à des points* O *situés en ligne droite, passent par un point fixe.*

2° *Démontrer que toutes les paraboles* (H), *qui cor-*

respondent dans le plan d'une conique (P) *à des points* O *situés en ligne droite, touchent une droite fixe.*

III. De la première (1°) on déduit une solution géométrique très simple de l'une des questions proposées au concours d'agrégation (*Mathématiques spéciales,* année 1893).

On sait que, si l'on considère deux quadriques dont les axes sont parallèles, le lieu des centres des quadriques qui passent par leur intersection est une cubique gauche C passant par les centres des deux quadriques données et par les points à l'infini sur les axes qui sont les centres des trois paraboloïdes qui passent par les points communs aux deux quadriques.

Il est évident que cette cubique C passe également par les sommets du tétraèdre autopolaire communs aux deux quadriques, qui sont les sommets des quatre cônes passant par l'intersection des deux quadriques.

Cette cubique n'est autre chose que la cubique C aux pieds des normales menées du centre de l'une des deux quadriques données (H) et (H_1) à une quadrique (H_2) concentrique à l'autre et dont les carrés des axes sont égaux au rapport des carrés des axes des deux quadriques données; leurs directions sont celles des deux quadriques.

Il résulte de là que, les deux quadriques données restant concentriques et homothétiques à deux quadriques (H) et (H_1), la cubique C reste la même.

Il suffit pour avoir la solution de la première question proposée au concours d'agrégation (1893) de remplacer (H_1) par le cône enveloppe des plans perpendiculaires aux génératrices de (H) menées d'un point donné.

Voici la solution de la deuxième question, qui est particulièrement intéressante.

La cubique C, considérée comme la courbe aux pieds des normales menées du centre ω_1 de (H_1) par rapport à la quadrique (H_2) définie plus haut, se projette sur chacun des plans principaux de (H_2) suivant trois hyperboles équilatères h_1, h_2, h_3. Si le point ω_1 décrit dans l'espace une droite Δ, sur chacun des plans principaux, les points ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 décriront les droites δ_1, δ_2, δ_3. D'après la propriété émise plus haut (1°), les hyperboles h_1 correspondant à tous les points ϖ_1 de δ_1 passeront par un point fixe a_1 situé sur δ_1. Puisque le point ω_1 appartenait à la cubique, la perpendiculaire Δ_1 élevée en a_1 à ce plan principal est une génératrice de la surface cherchée, lieu des cubiques C correspondant aux différents points de Δ.

Les droites Δ_2, Λ_3 construites d'une manière analogue et passant par les points a_2, a_3 sont deux autres génératrices de cette surface, à laquelle appartiendra évidemment la droite Δ, puisque la cubique C passait par le point ω_1 de Δ.

Il est évident que cette surface cherchée est l'hyperboloïde défini par ces trois génératrices du même système Δ_1, Δ_2, Δ_3, puisqu'il doit rencontrer un cylindre du second degré, admettant pour base une hyperbole équilatère h_1 et dont la direction des génératrices est Δ_1, suivant une cubique.

Nous terminerons en donnant la construction géométrique des points a_1, a_2, a_3 dans les trois plans principaux de (H_2). Du centre ω, commun à (H_1), (H_2), on mène, dans le plan principal qui contient δ_1, une droite perpendiculaire à cette dernière, puis son diamètre conjugué par rapport à la section principale de (H_2); ce diamètre rencontre δ_1 suivant le point cherché a_1. On opère de même dans les deux autres plans principaux pour les points a_2, a_3.

Cet hyperboloïde lieu de C a donc pour trace sur chacun des plans principaux de (H) une hyperbole équilatère admettant comme directions asymptotiques celles des axes de la section principale de (H) et passant par le centre de cette quadrique, par la trace de Δ sur ce plan et par le point a situé dans ce plan.