

AURIC

**Sur les équations différentielles linéaires
à coefficients constants**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 47-52

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__47_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES
À COEFFICIENTS CONSTANTS;**

PAR M. AURIC.

1. Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0.$$

Soient m_1, m_2, \dots, m_n les racines de l'équation caractéristique. On donne, en général, comme solution gé-

générale de l'équation (1)

$$(2) \quad y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}.$$

Cette façon de s'exprimer donne lieu, suivant nous, à de nombreuses objections.

1° En général, ce sont les coefficients p_1, p_2, \dots, p_n qui sont donnés et connus et non les racines m_1, m_2, \dots, m_n ; la solution devrait donc être donnée en fonction des coefficients p .

2° En général, ce sont les conditions initiales qu'on se donne arbitrairement; il en résulte que les constantes c_1, c_2, \dots, c_n , étant des fonctions bien déterminées de ces conditions initiales, ne sont plus absolument arbitraires.

3° La solution devant être fonction des coefficients p , en d'autres termes des données mêmes de la question, doit être une fonction symétrique des racines, ce qui ne peut avoir lieu que si les constantes c_1, c_2, \dots, c_n sont elles-mêmes des fonctions particulières de ces racines.

En résumé, la solution (2) est plutôt une solution symbolique qu'une véritable solution pratique.

Dans notre thèse (Chap. VIII), nous sommes arrivé au résultat suivant.

Considérons la fraction

$$\left\{ \frac{y_0 + \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_0 + p_1 y_0 \right] x + \left[\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 + p_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 + p_2 y_0 \right] x^2 + \dots + \left[\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)_0 + \dots + p_{n-1} y_0 \right] x^{n-1}}{1 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_n x^n} \right\},$$

et admettons que cette fraction développée soit

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

la solution générale de l'équation (1) prend la forme

$$(3) \quad y = a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + a_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

(49)

solution susceptible d'applications immédiates, car, ainsi que nous allons le montrer, la série obtenue est toujours convergente.

2. *Remarque.* — Si une série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

est convergente pour la valeur $x_0 \neq 0$ de x , je dis que la série

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + a_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

est convergente pour toute valeur de x .

En effet, la série

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots$$

étant convergente, on a nécessairement

$$a_n x_0^n \leq M;$$

on aura donc, en valeur absolue,

$$a_n \frac{x^n}{1.2.3\dots n} \leq M \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^n}{1.2.3\dots n},$$

d'où l'on voit que la série

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

a chacun de ses termes plus petits en valeur absolue que ceux de la série toujours convergente

$$M e^{\frac{x}{x_0}} = M + M \frac{x}{1} + M \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}{1.2} + \dots;$$

donc cette série est également toujours convergente.

3. Si maintenant nous considérons la fonction

$$\frac{U}{1 + p_1 x + p_n x^n}$$

U étant un polynome entier de degré $(n - 1)$ en x , et si ρ est le module minimum des racines de l'équation

$$1 + p_1 x + \dots + p_n x^n = 0,$$

cette fonction sera holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon ρ ; on pourra donc lui appliquer le théorème de Taylor; en d'autres termes, le quotient développé sera une série convergente pour toute valeur de x inférieure à ρ .

Il en résulte que le procédé indiqué plus haut est toujours applicable.

4. *Applications.* — 1° L'équation caractéristique a une seule racine réelle,

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0.$$

Nous considérons la fraction

$$\frac{y_0}{1 - ax} = y_0(1 + ax + a^2 x^2 + \dots)$$

et la solution est

$$(1) \quad y_0 \left(1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots \right) = y_0 e^{ax}.$$

2° L'équation caractéristique a deux racines imaginaires

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\rho \cos \theta \frac{dy}{dx} + \rho^2 y = 0.$$

Nous avons à développer la fraction

$$\frac{y_0 + \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_0 + p_1 y_0 \right] x}{1 - 2\rho x \cos \theta + \rho^2 x^2} = \frac{y_0 + \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_0 - 2\rho \cos \theta y_0 \right] x}{1 - 2\rho x \cos \theta + \rho^2 x^2}.$$

la série sera convergente pour toute valeur de x de module inférieur à $\frac{1}{\rho}$.

Ce résultat peut être généralisé par la considération des sinus d'ordre supérieur.

4° Admettons que l'on connaisse les racines de l'équation caractéristique et, par suite, de l'équation aux inverses

$$1 + p_1 x + \dots + p_n x^n = 0;$$

on décomposera en éléments simples la fraction

$$\frac{U}{1 + p_1 x + \dots + p_n x^n},$$

et l'on obtiendra des fractions élémentaires de la forme

$$\frac{A}{1 - ax}, \quad \frac{A}{(1 - ax)^k},$$

$$\frac{Mx + N}{1 - 2\rho x \cos \theta + \rho^2 x^2}, \quad \frac{Mx + N}{(1 - 2\rho x \cos \theta + \rho^2 x^2)^k},$$

qui donneront chacune une portion de l'intégrale générale sous une forme relativement simple.