NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUDIBERT

Concours pour les bourses de licence en 1893

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 44-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__44_0>

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE EN 1893 [1];

PAR M. AUDIBERT.

I. 1° La tangente à la courbe (c) au point x, y, z,

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{2t}=\frac{Z-z}{2t^2}$$

fait avec les axes les angles α, β, γ; on aura, d'après l'énoncé,

$$\cos\alpha=\frac{1}{2t^2+1}=x,$$

$$\cos\beta=\frac{2t}{2t^2+1}=y,$$

$$\cos\gamma=\frac{2t^2}{2t^2+1}=z,$$

x, y et z désignant les coordonnées d'un point du lieu. On en tire, par l'élimination de t,

$$x+z=1,\qquad y^2+2x^2=2x,$$

équations d'un cercle situé dans le plan $x+z=1$, de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ayant son centre au point $x=\frac{1}{2}$, $y=0$, $z=\frac{1}{2}$.

2° La normale principale est déterminée par l'intersection du plan osculateur

$$(X-x)2t^2-(Y-y)2t+Z-z=0,$$

avec le plan normal

$$X-x+(Y-y)2t+(Z-z)2t^2=0.$$

---

[1] *Voir* 3e série, t. XII, p. 462.

Son équation peut s'écrire

$$\frac{X - x}{1} = \frac{2t(Y - y)}{2t^2 - 1} = \frac{Z - z}{-1}.$$

On aura, comme dans le cas précédent,

$$\cos\alpha = \frac{2t}{2t^2 + 1} = x,$$

$$\cos\beta = \frac{2t^2 - 1}{2t^2 + 1} = y,$$

$$\cos\gamma = \frac{-2t}{2t^2 + 1} = z,$$

d'où les deux équations

$$x + z = 0, \qquad y^2 + 2x^2 = 1,$$

qui représentent un cercle de rayon 1, dans le plan $x + z = 0$, et dont le centre est à l'origine.

3° La perpendiculaire au plan osculateur, ou binormale au point x, y, z de la courbe (c), a pour équation

$$\frac{X - x}{2t^2} = \frac{Y - y}{-2t} = \frac{Z - z}{1}.$$

On aura encore

$$\cos\alpha = \frac{2t^2}{2t^2 + 1} = x,$$

$$\cos\beta = \frac{-2t}{2t^2 + 1} = y,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2t^2 + 1} = z,$$

et l'élimination de t donne, comme dans le premier cas,

$$x + z = 1, \qquad y^2 + 2x^2 = 2x.$$

II. Une des bissectrices de l'angle formé par la tangente et la binormale au point x, y, z de (c),

$$Y = y, \qquad Z = X + z - x,$$

fait avec les axes les angles fixes $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.

L'équation de la surface cylindrique qu'elle forme en s'appuyant sur (c) s'obtiendra en éliminant x, y et z entre ses équations et celles de la courbe (c),

$$3y = x^2, \qquad 9z = 2xy.$$

La résultante est

$$Y(2y - 9)^2 = 27(Z - X)^2.$$

L'équation de la projection sur le plan des XY de la section de cette surface par le plan $Z + X = a$ sera

$$(1) \qquad Y(2y - 9)^2 = 27(a - 2X)^2.$$

Rapportons cette courbe à deux axes situés dans son plan $Z + X = a$, l'axe des abscisses étant la trace de ce plan sur les XZ, celui des ordonnées la perpendiculaire à cette trace élevée au point où la bissectrice de l'angle des XZ la rencontre.

Soient ξ et η les nouvelles coordonnées, les formules de transformation

$$X = \frac{a}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \eta,$$

introduites dans (1), donneront l'équation de la section droite

$$\eta(2\eta - 9)^2 = 54\xi^2.$$

Cette courbe située dans la région des ordonnées positives est symétrique par rapport à l'axe des η ; elle est tangente à l'origine à l'axe des ξ. Au point $\xi = 0$, $\eta = \frac{9}{2}$, elle a un nœud où se croisent deux branches allant à l'infini. Les deux tangentes ont au nœud les coefficients angulaires $\pm\sqrt{3}$.

III. Le plan contenant à la fois la binormale et la tangente au point x, y, z de la courbe (c) est représenté par l'équation

$$t(4t^2+2)(X-x)+(4t^4-1)(Y-y)$$
$$-t(4t^2+2)(Z-z)=0,$$

qui devient, en remplaçant x, y et z par leurs valeurs en t,

$$2tX+(2t^2-1)Y-2tZ-t^2(2t^2+3)=0.$$

Soit donné un point fixe ($t=a$) sur la courbe (c); écrivons que ce point est sur le plan, nous aurons la condition

$$6at+3a^2(2t^2-1)-4a^3t-t^2(2t^2+3)=0$$

ou

$$(t-a)^2(2t^2+4at+3)=0.$$

Le second facteur du premier membre égalé à zéro donnera deux valeurs de t (autres que a) qui annuleront cette équation. On en conclut que d'un point quelconque ($t=a$) de la courbe (c) on peut mener deux plans remplissant les conditions de l'énoncé. Pour que ces plans soient réels, il faudra avoir $a^2>\frac{3}{2}$.