NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GENTY

Solution de la question de mathématiques spéciales posée au concours d'agrégation en 1893

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 399-404

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__399_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES POSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1893;

PAR M. GENTY.

On considère un hyperboloïde à une nappe H *et le cône* S *qui est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de cet hyperboloïde menés par un point donné* M.

1° *Déterminer les sommets du tétraèdre* $MM_1M_2M_3$ *conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de l'hyperboloïde* H *et du cône* S.

Trouver le lieu C *des sommets* M_1, M_2, M_3 *de ce tétraèdre lorsque, le point* M *restant fixe, l'hyperboloïde* H *se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.*

2° *Trouver la surface engendrée par la ligne* C *lorsque le point* M *décrit une droite donnée* D, *et déterminer les positions qu'il faut donner à cette droite* D *pour que cette surface soit de révolution.*

3° *Déterminer les coordonnées du centre* ω *de la sphère circonscrite au tétraèdre* $MM_1M_2M_3$ *en fonc-*

tion des coordonnées du point M *pour un hyperboloïde donné* H.

Trouver le lieu de ce centre ω *lorsque, le point* M *restant fixe, l'hyperboloïde* H *se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.*

4° *Démontrer que la droite qui joint le centre* ω *de la sphère circonscrite au tétraèdre* $MM_1M_2M_3$ *au centre de gravité* G *de ce tétraèdre passe par un point fixe* I *lorsque, le point* M *restant fixe, l'hyperboloïde* H *se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, et faire voir que le point* G *est le milieu de* ωI.

1° Soient

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation de l'hyperboloïde H; x', y' et z' les coordonnées du point M; l'équation du cône S sera

$$\frac{(x-x')^2}{A} + \frac{(y-y')^2}{B} + \frac{(z-z')^2}{C} = 0,$$

et, si l'on désigne par α, β, γ les coordonnées de l'un des sommets du tétraèdre autopolaire commun à l'hyperboloïde et au cône, les plans polaires de ce point par rapport aux deux surfaces auront respectivement pour équations

$$A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = 1,$$

$$\frac{(\alpha - x')(x-x')}{A} + \frac{(\beta - y')(y-y')}{B} + \frac{(\gamma - z')(z-z')}{C} = 0.$$

Ces deux équations devant être identiques, on aura

$$\frac{A^2\alpha}{\alpha - x'} = \frac{B^2\beta}{\beta - y'} = \frac{C^2\gamma}{\gamma - z'} = \frac{1}{\frac{x'(\alpha - x')}{A} + \frac{y'(\beta - y')}{B} + \frac{z'(\gamma - z')}{C}} = t,$$

ou encore

$$(1)\qquad \alpha = \frac{tx'}{t - A^2}, \qquad \beta = \frac{ty'}{t - B^2}, \qquad \gamma = \frac{tz'}{t - C^2},$$

$$(2)\qquad A\alpha x' + B\beta y' + C\gamma z' = 1.$$

Si l'on regarde t comme un paramètre arbitraire, les équations (1) représentent une cubique gauche C, et l'équation (2) le plan polaire du point M par rapport à l'hyperboloïde.

Les points cherchés M_1, M_2 et M_3 sont les points de la cubique situés dans ce plan, et les valeurs correspondantes de t sont les racines de l'équation

$$\frac{Ax'^2 t}{A^2 - t} + \frac{By'^2 t}{B^2 - t} + \frac{Cz'^2 t}{C^2 - t} + 1 = 0.$$

Si dans les équations (1) nous remplaçons A, B et C par kA, kB et kC respectivement, elles représenteront évidemment encore la même courbe. Donc la cubique gauche C est le lieu des points M_1, M_2 et M_3, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné. Cette courbe passe à l'origine pour $t = 0$, au point M pour $t = \infty$, et ses asymptotes sont parallèles aux axes de l'hyperboloïde.

2° Si dans les équations de la cubique C nous remplaçons x', y' et z' par $x' + kX$, $y' + kY$ et $z' + kZ$ respectivement, X, Y et Z étant les cosinus directeurs d'une droite D, elles deviennent

$$\alpha = \frac{t(x' + kX)}{t - A^2}, \qquad \beta = \frac{t(y' + kY)}{t - B^2}, \qquad \gamma = \frac{t(z' + kZ)}{t - C^2}$$

ou

$$\begin{aligned} A^2\alpha + t(x' - \alpha) + ktX &= 0, \\ B^2\beta + t(y' - \beta) + ktY &= 0, \\ C^2\gamma + t(z' - \gamma) + ktZ &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant k et t entre ces équations, il vient

$$\begin{vmatrix} A^2\alpha & B^2\beta & C^2\gamma \\ X & Y & Z \\ \alpha - x' & \beta - y' & \gamma - z' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{aligned}(B^2 - C^2)X\beta\gamma + (C^2 - A^2)Y\gamma\alpha + (A^2 - B^2)Z\alpha\beta \\ + A^2\alpha(Yz' - Zy') + B^2\beta(Zx' - Xz') \\ + C^2\gamma(Xy' - Yx') = 0,\end{aligned}$$

équation d'un hyperboloïde équilatère, qui contient la droite D et passe par l'origine.

Pour que cet hyperboloïde soit de révolution, il faut qu'on ait

$$\pm(B^2 - C^2)X = \pm(C^2 - A^2)Y = \pm(A^2 - B^2)Z,$$

équation de quatre directions fixes.

L'hyperboloïde, lieu des cubiques gauches C, sera donc de révolution quand le point M parcourra une droite parallèle à l'une de ces directions.

3° Si nous portons l'origine au point M, les équations qui déterminent les points M_1, M_2 et M_3 deviennent

$$h^2yz + B^2y'z - C^2z'y = 0, \tag{3}$$

$$k^2zx + C^2z'x - A^2x'z = 0, \tag{4}$$

$$l^2xy + A^2x'y - B^2y'x = 0, \tag{5}$$

$$Axx' + Byy' + Czz' - S = 0,$$

où l'on a posé

$$h^2 = B^2 - C^2, \qquad k^2 = C^2 - A^2, \qquad l^2 = A^2 - B^2,$$
$$S = 1 - Ax'^2 - By'^2 - Cz'^2.$$

L'équation générale des quadriques circonscrites au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ est alors de la forme

$$\begin{aligned}\lambda(h^2yz + B^2y'z - C^2z'y) + \mu(k^2zx + C^2z'x - A^2x'z) \\ + \nu(l^2xy + A^2x'y - B^2y'x) \\ + (mx + ny + pz)(Axx' + Byy' + Czz' - S) = 0.\end{aligned}$$

Les conditions pour que cette quadrique soit une sphère sont

$$
\begin{aligned}
&A m x' = B n y' = C p z',\\
&\lambda h^2 + B p y' + C n z' = 0,\\
&\mu k^2 + C m z' + A p x' = 0,\\
&\nu l^2 + A n x' + B m y' = 0.
\end{aligned}
$$

On peut prendre pour la valeur commune des coefficients de x^2, y^2 et z^2 l'expression $ABCx'y'z'$, et alors on a

$$m = BCy'z', \qquad n = CAz'x', \qquad p = ABx'y'.$$

$$\lambda = -\frac{Ax'(B^2y'^2 + C^2z'^2)}{h^2},$$

$$\mu = -\frac{By'(C^2z'^2 + A^2x'^2)}{k^2},$$

$$\nu = -\frac{Cz'(A^2x'^2 + B^2y'^2)}{l^2};$$

et si l'on désigne par x_ω l'abscisse du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$, on aura

$$x_\omega = \frac{Cl^2(C^2z'^2 + A^2x'^2) - Bk^2(A^2x'^2 + B^2y'^2) + l^2k^2(1 - Ax'^2 - By'^2 - Cz'^2)}{2Al^2k^2x'};$$

les expressions de y_ω et de z_ω se déduiront de celle de x_ω par une simple permutation circulaire.

Si maintenant, dans l'équation qui précède, on remplace A, B et C par tA, tB et tC, respectivement, il vient

$$x_\omega = \frac{\left\{\begin{array}{l} t[Cl^2(C^2z'^2 + A^2x'^2) - Bk^2(A^2x'^2 + B^2y'^2) \\ \qquad - l^2k^2(A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2)] + l^2k^2 \end{array}\right\}}{2tAl^2K^2x'}.$$

Donc, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ décrit une droite.

4° Cherchons maintenant le centre de gravité G de ce tétraèdre.

Si nous portons dans l'équation (5) les valeurs de y et de z tirées des équations (3) et (4), il vient

$$\mathrm{A}xx' + \frac{\mathrm{B}^3 y'^2 x}{\mathrm{A}^2 x' + l^2 x} + \frac{\mathrm{C}^3 z'^2 x}{\mathrm{A}^2 x' - k^2 x} - \mathrm{S} = 0;$$

et si x_1, x_2 et x_3 sont les racines de cette équation et x_G l'abscisse du point G, on aura

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},$$

ou

$$x - \frac{\mathrm{A}^3 x'^2 (l^2 - k^2) - \mathrm{B}^3 k^2 y'^2 + \mathrm{C}^3 l^2 z'^2 + l^2 k^2 (1 - \mathrm{A} x'^2 - \mathrm{B} y'^2 - \mathrm{C} z'^2)}{4 \mathrm{A} l^2 k^2 x'};$$

on obtiendrait y_G et z_G par une permutation circulaire.

Si, dans l'expression de x_G, on remplace A, B et C par tA, tB et tC, respectivement, il vient

$$x_G - \frac{t[\mathrm{A}^3 x'^2 (l^2 - k^2) - \mathrm{B}^3 k^2 y'^2 + \mathrm{C}^3 l^2 z'^2 - l^2 k^2 (\mathrm{A} x'^2 + \mathrm{B} y'^2 + \mathrm{C} z'^2)] + l^2 k^2}{4 t \mathrm{A} l^2 k^2 x'};$$

on voit donc que le lieu du point G est aussi une droite.

On reconnaît immédiatement que l'expression $2x_G - x_\omega$ est indépendante de t; donc, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, la droite ωG passe par un point fixe I et le point G est le milieu de ωI. En d'autres termes, le centre de l'hyperboloïde des hauteurs du tétraèdre $\mathrm{MM_1M_2M_3}$ est un point fixe.

Note. — Solution analogue par M. Gambey. M. Leinekugel, élève ingénieur hydrographe de la Marine, nous a envoyé une solution analytique et une solution géométrique d'une généralisation de cette même question. Nous donnerons sa solution géométrique dans le prochain numéro.