NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ CAZAMIAN

Sur les quadriques inscrites dans la même développable

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 395-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__395_0>

SUR LES QUADRIQUES INSCRITES DANS LA MÊME DÉVELOPPABLE;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

On sait que le système des quadriques passant par la courbe d'intersection de deux quadriques données est coupé par un plan quelconque suivant un système de coniques passant par quatre points fixes. Les pôles doubles de ce faisceau de coniques sont les points de contact des trois quadriques du système tangentes au plan considéré, de sorte que l'on peut dire que les quadriques passant par les points communs à deux quadriques données sont coupées par un plan quelconque suivant des coniques conjuguées à un même triangle.

Ce fait, que les quadriques d'un faisceau sont coupées par un plan quelconque suivant des coniques formant un faisceau, conduit à d'intéressantes propositions. On voit d'abord immédiatement que le théorème de Desargues s'étend intégralement à l'espace :

Les quadriques passant par les points communs à deux quadriques données déterminent une involution sur une droite quelconque. Les points doubles de l'involution sont les points de contact des deux quadriques du système tangentes à la droite donnée.

En transformant par dualité, nous avons le théorème suivant :

Les plans tangents menés par une droite D *aux quadriques inscrites dans la même développable forment un faisceau involutif. Les plans doubles de l'involution* *sont les plans tangents aux deux quadriques du système qui touchent la droite* D.

Corollaire. — *Les plans tangents menés par une droite à deux quadriques homofocales font des angles égaux avec deux plans fixes passant par la droite.*

En effet, les plans doubles de l'involution étant alors rectangulaires, tous les couples de plans du faisceau involutif admettent les mêmes plans bissecteurs : ce sont ces plans doubles. En particulier :

Les plans tangents menés par une droite à une quadrique sont également inclinés sur les plans tangents menés par cette droite à une focale de la quadrique.

C'est l'analogue du théorème de Poncelet relatif aux tangentes menées par un point à une conique.

Transformons maintenant par dualité le théorème que nous avons énoncé au début :

Les cônes ayant pour sommet un même point P *de l'espace et circonscrits aux quadriques inscrites dans la même développable touchent les quatre faces d'un même angle tétraèdre. Les plans diagonaux de l'angle tétraèdre complet* (1) *sont les plans tangents aux trois quadriques du faisceau qui passent en* P.

Corollaires. — Ce théorème a d'intéressants corollaires :

1° *Les cônes de même sommet* P *circonscrits à un faisceau de quadriques inscrites dans la même déve-*

(1) Par analogie, on pourrait appeler *angle tétraèdre complet* la figure formée par quatre plans passant par un même point, figure que l'on obtient en joignant un point de l'espace aux six sommets d'un quadrilatère complet.

loppable sont conjugués à un même trièdre, qui est le trièdre formé par les plans tangents aux quadriques du faisceau passant en P.

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Les cônes Σ *de sommet* P *circonscrits aux quadriques inscrites dans la même développable ont un même système de diamètres triplement conjugués;*

2° *Les coniques sections par un plan des cônes* Σ *sont inscrites dans un même quadrilatère ;*

3° *Les points où les arêtes du trièdre formé par les plans tangents aux quadriques d'un système tangentiel coupent le plan d'une des quatre coniques du système forment un triangle conjugué à cette conique.*

Applications. — Supposons que l'une des quatre coniques du système des quadriques inscrites dans la même développable soit l'ombilicale, nous aurons alors affaire à un système de quadriques homofocales. Les théorèmes précédemment énoncés permettent de retrouver dans ce cas particulier des théorèmes bien connus. Ainsi, le cône isotrope de sommet P faisant partie du système des cônes Σ, le trièdre conjugué commun T sera trirectangle : donc *les quadriques homofocales à une quadrique qui passent par un point* P *sont orthogonales.* De plus, les cônes Σ auront les mêmes axes, puisque les sections par le plan de l'infini, qui sont des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à l'ombilicale, ont un triangle conjugué commun avec ce cercle. Ces axes seront les arêtes du trièdre formé par les plans tangents aux trois quadriques de la famille qui passent en P, donc : *Les axes d'un cône circonscrit à une quadrique sont les normales aux trois quadriques homofocales qui passent par le sommet.*

Le corollaire n° 3 nous conduit à cette proposition, qui est due à Chasles :

Les axes d'un cône circonscrit à une quadrique rencontrent un plan principal en trois points formant un triangle conjugué à la focale située dans ce plan.

Enfin, il est très facile de démontrer que les cônes Σ, qui ont les mêmes axes, sont aussi homofocaux. En effet, les droites focales d'un cône de sommet P sont, comme l'on sait, les perpendiculaires menées par P aux plans de sections circulaires du cône supplémentaire. Or, un cône supplémentaire d'un cône quelconque rencontre le plan de l'infini suivant une conique polaire réciproque par rapport à l'ombilicale de la section du cône donné. Mais, dans le cas considéré, le système des cônes Σ rencontre le plan de l'infini suivant des coniques C, parmi lesquelles se trouve l'ombilicale, conjuguées à un même triangle T. La polaire réciproque d'une conique C par rapport à l'ombilicale sera une autre conique conjuguée au triangle réciproque de T, c'est-à-dire au même triangle. Il en résulte que le système des cônes Σ et le système de leurs cônes supplémentaires ont les mêmes axes, et par suite les mêmes plans cycliques. Donc les cônes Σ ont les mêmes focales.

De ce qui vient d'être dit, on peut déduire le théorème suivant :

Un cône étant circonscrit à une quadrique, son supplémentaire est circonscrit à une quadrique homofocale.

Remarque. — Deux des théorèmes énoncés au début peuvent encore se formuler ainsi :

Toutes les quadriques passant par huit points quel-

conques de l'espace déterminent une involution sur une droite quelconque.

Les plans tangents menés par une droite aux quadriques tangentes à huit plans forment un faisceau involutif.

Ainsi énoncés, ces théorèmes sont presque évidents *a priori*.