

ANDRÉ CAZAMIAN

**Sur les points d'une conique situés
sur un même cercle**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 386-394

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__386_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES POINTS D'UNE CONIQUE SITUÉS
SUR UN MÊME CERCLE;**

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

On connaît la relation suivante, qui lie les angles d'anomalie excentrique de quatre points d'une ellipse situés sur un même cercle :

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2m\pi$$

(m pouvant être nul).

De cette relation, on peut déduire, outre un théorème

bien connu, de Steiner, plusieurs propriétés intéressantes. Nous allons en signaler quelques-unes.

I. Considérons quatre points d'une ellipse situés sur un cercle; leurs paramètres vérifient la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\mu\pi.$$

Appelons $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4$ les paramètres des points où les cercles osculateurs en chacun des points considérés rencontrent de nouveau l'ellipse, on aura

$$3\varphi_1 + \varphi'_1 = 2m\pi,$$

$$3\varphi_2 + \varphi'_2 = 2m'\pi,$$

$$3\varphi_3 + \varphi'_3 = 2m''\pi,$$

$$3\varphi_4 + \varphi'_4 = 2m'''\pi.$$

D'où, en ajoutant membre à membre et en tenant compte de la première relation,

$$6\mu\pi + \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 = 2(m + m' + m'' + m''')\pi = 2M\pi,$$

donc

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 = 2M\pi - 6\mu\pi = 2\pi(M - 3\mu) = 2K\pi,$$

ce qui prouve que les quatre points $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4$ sont sur un même cercle. Ainsi :

Les cercles osculateurs en quatre points d'une ellipse situés sur un cercle ω rencontrent de nouveau l'ellipse en quatre points situés sur un cercle.

Transformons par rayons vecteurs réciproques, en plaçant le centre d'inversion :

1° Sur l'ellipse, mais ailleurs qu'aux points d'intersection du cercle ω avec l'ellipse. On a cette proposition :

Les cercles osculateurs en quatre points d'une cu-

bique unicursale circulaire ⁽¹⁾ situés sur un cercle rencontrent de nouveau la cubique en quatre points situés sur un cercle.

2° En l'un des points de rencontre du cercle ω avec l'ellipse. Alors au cercle osculateur en ce point correspond l'asymptote réelle de la cubique. On a ce théorème :

Les cercles osculateurs en trois points d'une cubique unicursale circulaire situés sur une même droite rencontrent de nouveau la cubique en trois points : le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points passe par un point fixe de la cubique, qui est le point où elle rencontre son asymptote réelle.

3° En un point quelconque du plan. L'inverse est une quartique bicirculaire ayant un point double au pôle. Nous l'appellerons une *cyclique unicursale*. En transformant, on voit que :

Les cercles osculateurs en quatre points d'une cyclique unicursale situés sur un même cercle rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un même cercle.

II. Un point M, de paramètre φ étant pris sur une ellipse, son symétrique par rapport au centre a pour paramètre $\pi + \varphi$. Mais si l'on a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2m\pi,$$

(1) Les inverses de l'ellipse, le centre d'inversion étant sur la courbe, sont en réalité des cubiques circulaires acnodales. Mais, comme les théorèmes que nous énonçons sont également vrais pour l'hyperbole, les résultats s'étendent aussi aux cubiques circulaires crunodales.

on a aussi

$$(\varphi_1 + \pi) + (\varphi_2 + \pi) + (\varphi_3 + \pi) + (\varphi_4 + \pi) = 2m'\pi$$

et

$$(\varphi_1 + \pi) + (\varphi_2 + \pi) + \varphi_3 + \varphi_4 = 2m''\pi;$$

donc :

Si quatre points d'une ellipse sont sur un cercle :

1° *Les symétriques de ces points par rapport au centre sont également sur un cercle ;*

2° *Deux quelconques des quatre points et les symétriques des deux autres par rapport au centre sont également sur un cercle.*

En transformant par inversion, le centre de l'ellipse devient un point déterminé du plan de la courbe inverse. On obtient des théorèmes faciles à énoncer.

En particulier, si le centre d'inversion est au centre de l'ellipse, la figure inverse est une cyclique unicursale ayant également le pôle pour centre. D'où ces théorèmes :

Lorsqu'une cyclique unicursale a son point double (1) pour centre :

1° *En coupant la courbe par un cercle, les symétriques des quatre points d'intersection par rapport au centre sont également sur un cercle ;*

2° *Deux des points d'intersection et les symétriques des deux autres par rapport au centre sont également sur un cercle.*

III. Considérons quatre points d'une ellipse $\varphi_1, \varphi_2,$

(1) Le point double autre que les points cycliques. La lemniscate est un exemple de ces cycliques, mais la propriété s'applique aussi bien aux inverses d'hyperboles quelconques relativement au centre.

φ_3, φ_4 appartenant à un cercle, et par le point φ_1 menons les cercles tangents à l'ellipse en chacun des points $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, et soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ les paramètres des points où ces cercles rencontrent de nouveau l'ellipse ; on a les relations

$$\begin{aligned}\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= 2m\pi, \\ \varphi_1 + 2\varphi_2 + \theta_1 &= 2m'\pi, \\ \varphi_1 + 2\varphi_3 + \theta_2 &= 2m''\pi, \\ \varphi_1 + 2\varphi_4 + \theta_3 &= 2m'''\pi.\end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre les trois dernières égalités,

$$3\varphi_1 + 2(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{mult. } 2\pi,$$

ou

$$2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + \varphi_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{mult. } 2\pi,$$

ou

$$4m\pi + (\varphi_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \text{mult. } 2\pi,$$

d'où

$$\varphi_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{mult. } 2\pi,$$

ce qui montre que les quatre points $\varphi_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont sur un même cercle. Ainsi :

Quatre points d'une conique étant situés sur un cercle, si, par l'un d'eux, A, on mène les cercles tangents à la conique en chacun des trois autres, les trois nouveaux points où ces cercles rencontrent la conique sont, avec A, sur une même circonférence.

Théorèmes identiques pour les cubiques unicursales circulaires et les cycliques unicursales.

Remarque. — Si le pôle d'inversion est placé en l'un des points d'intersection du cercle avec la conique, on retrouve ce théorème bien connu :

Les tangentes à une cubique (circulaire unicursale)

en ses points d'intersection avec une droite rencontrent de nouveau la cubique en trois points en ligne droite.

IV. Considérons deux cercles quelconques rencontrant l'ellipse respectivement aux points

$$A, B, C, D (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \text{ et } A', B', C', D' (\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4).$$

Menons par A le cercle tangent à l'ellipse en A', par B le cercle tangent en B', . . . , les quatre cercles ainsi tracés rencontrent de nouveau l'ellipse en quatre points $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, et on a

$$\begin{aligned}
\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= 2m\pi, \\
\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 &= 2m'\pi, \\
\varphi_1 + 2\varphi'_1 + \theta_1 &= 2\mu\pi, \\
\varphi_2 + 2\varphi'_2 + \theta_2 &= 2\mu'\pi, \\
\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les quatre dernières relations,

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + 2(\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4) + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \text{mult. } 2\pi$$

ou

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \text{mult. } 2\pi.$$

Par conséquent :

Deux cercles quelconques rencontrant une conique respectivement aux points A, B, C, D, A', B', C', D', si l'on mène le cercle passant par A et tangent à la conique en A', le cercle passant par B et tangent en B', . . . , les quatre cercles ainsi tracés rencontrent de nouveau la conique en quatre points situés sur un cercle.

Théorèmes identiques pour les cubiques unicursales circulaires et les cycliques unicursales.

V. Quatre points d'une ellipse étant situés sur un cercle, par deux d'entre eux faisons passer un cercle, ainsi que par les deux autres. On aura

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2m\pi,$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \theta_1 + \theta_2 = 2m'\pi,$$

$$\varphi_3 + \varphi_4 + \theta_3 + \theta_4 = 2m''\pi,$$

donc

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \text{mult. } 2\pi.$$

Ainsi :

Quatre points d'une $\left\{ \begin{array}{l} \text{conique} \\ \text{cubique unicursale circulaire} \\ \text{cyclique unicursale} \end{array} \right\}$
 étant situés sur un cercle, si par deux d'entre eux on fait passer un cercle, ainsi que par les deux autres, les quatre nouveaux points de rencontre avec la courbe sont sur un cercle.

VI. Si, par deux points fixes A, B d'une conique, on fait passer une série de cercles, les secondes cordes d'intersection avec la conique sont parallèles entre elles. Transformons cette propriété par rayons vecteurs réciproques :

Si autour d'un point fixe d'une cubique unicursale circulaire on fait pivoter une sécante, le cercle passant par le point double et les deux autres points d'intersection de la sécante avec la courbe ont leurs centres en ligne droite.

Si par deux points fixes A, B d'une $\left\{ \begin{array}{l} \text{cyclique unicursale} \\ \text{circulaire} \\ \text{cyclique unicursale} \end{array} \right\}$
 on fait passer une série de cercles, les cercles passant par le point double et les deux autres points d'intersection de chaque cercle avec la courbe ont le même axe radical.

VII. Par deux points fixes φ_1, φ_2 d'une ellipse, faisons passer des cercles, et par les deux autres points d'intersection φ_3, φ_4 , ainsi que par un point fixe A de l'ellipse, faisons passer des cercles; soit x le quatrième point d'intersection avec l'ellipse. On a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2m\pi,$$

$$\varphi_3 + \varphi_4 + \theta_1 + x = 2m'\pi,$$

θ_1 désignant le paramètre du point A; d'où

$$x = 2(m' - m) + \varphi_1 + \varphi_2 - \theta_1.$$

Les points $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1$ étant fixes, les valeurs de x obtenues ne diffèrent entre elles que d'un multiple de 2π , le point x est fixe sur l'ellipse. Ainsi :

Si, par deux points fixes d'une ellipse, on fait passer des cercles; si, par les deux points d'intersection de ces cercles avec l'ellipse et un point fixe A de la courbe, on fait passer des cercles; ces derniers cercles passent par un quatrième point fixe de l'ellipse.

Transformons par inversion :

Si, par deux points fixes d'une $\left. \begin{array}{l} \text{cubique unicursale} \\ \text{circulaire} \\ \text{cyclique unicursale} \end{array} \right\}$

on fait passer des cercles, les cercles passant par les deux nouveaux points d'intersection et par un point fixe A de la courbe passent par un autre point fixe de cette courbe.

Si le centre d'inversion est en l'un des deux premiers points fixes de la conique, on a ce théorème :

Si, autour d'un point fixe d'une cubique unicursale circulaire on fait pivoter une sécante, les cercles, passant par un point fixe A de la cubique et par les deux

autres points d'intersection de la cubique avec la sécante, passent par un même point fixe situé sur la courbe.

Si le centre d'inversion était au point A de l'ellipse, on retrouverait cette proposition connue, et vraie pour une cubique circulaire non unicursale :

Si, par deux points fixes de la courbe on fait passer une série de cercles, les cordes d'intersection de ces cercles avec la cubique passent par un point fixe situé sur elle.

VIII. Voici l'énoncé, plus correct, des trois théorèmes remarquables que nous avons obtenus :

1° *Les cercles osculateurs à une conique en quatre points concycliques rencontrent de nouveau la conique en quatre points concycliques.*

2° *Les cercles osculateurs à une cubique unicursale circulaire en trois points collinéaires rencontrent la cubique en trois points concycliques avec le point de section.*

3° *Les cercles osculateurs à une* $\left. \begin{array}{l} \text{cubique unicursale} \\ \text{circulaire} \\ \text{cyclique unicursale} \end{array} \right\}$ *en quatre points concycliques rencontrent de nouveau la courbe en quatre points concycliques* (1).

(1) Ce théorème, énoncé pour la strophoïde et la lemniscate par M. Balitrand, est donc loin de s'appliquer à ces seules courbes.