NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 384-386

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__384_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. A. Cazamian à M. Brisse.

Dans une Note intitulée « Sur quelques propriétés des courbes planes unicursales du troisième ordre », M. Astor (*Nouvelles Annales*, juillet 1892) considère des cubiques unicursales dont la droite des inflexions est à l'infini. Il indique que la corde polaire d'un point quelconque de la courbe enveloppe une conique ayant son centre au point double et pour asymptotes les tangentes en ce point. Ces cubiques jouissent de beaucoup d'autres propriétés remarquables. D'abord elles sont *quarrables algébriquement* (*voir* une Note de M. M. Marie, *Nouvelles Annales*, juin 1891). Elles sont donc ou des trèfles ou des projections du folium de Descartes. Toutes ces cubiques peuvent en outre être considérées comme les *polaires réciproques de quartiques à trois rebroussements par rapport à un cercle ayant son centre au point de concours des tangentes de rebroussement* (¹). Si les trois tangentes de rebroussement sont réelles, on a des trèfles; si deux des tangentes sont imaginaires, on a des cubiques de la seconde catégorie (projections du folium de Descartes).

La cubique que M. Astor étudie en dernier lieu :

$$x(x^2 - 3y^2) = R(x^2 + y^2)$$

est une courbe absolument remarquable. Elle a trois asymptotes inflexionnelles formant un triangle équilatéral, et trois axes de symétrie. Son point double est un foyer. Ses trois sommets sont situés sur un même cercle de rayon R. Elle pourrait être appelée le *trèfle équilatéral*. En coordonnées polaires son équation est $\rho \cos 3\omega = R$. Elle est la polaire réciproque d'une hypocycloïde à trois rebroussements par rapport à un cercle

---

(¹) On peut donc énoncer ainsi les résultats dus à M. Marie :

Les polaires reciproques des quartiques de troisième classe, le centre du cercle directeur étant au point de concours des tangentes de rebroussement, sont des cubiques quarrables algébriquement, et ce sont les seules.

Ainsi la trisectrice de Mac Laurin, qui est la polaire réciproque d'une cardioïde par rapport à un cercle ayant son centre au foyer triple, est quarrable algébriquement. C'est ce qu'a trouvé M. de Longchamps (Cours de *Mathématiques speciales, supplément,* page 159 de la première édition). On peut aussi déduire de là que la trisectrice de Mac Laurin est une projection du folium de Descartes.

concentrique au cercle inscrit (en transformant les propriétés si connues de l'hypocycloïde on obtient un grand nombre de propriétés de la cubique).

La figure inverse de cette cubique, le pôle étant au point double, est un trifolium équilatéral. La quadratrice du trèfle équilatéral est

$$\frac{x+\mathrm{R}}{3}\sqrt{(3x-\mathrm{R})(x+\mathrm{R})}.$$

On peut encore signaler ces propriétés :

Le trèfle équilatéral est la seule cubique dont la cayleyenne soit un cercle : c'est le cercle inscrit dans le triangle des asymptotes. Ce cercle étant en même temps la conique polaire de la droite de l'infini, les tangentes à la cubique aux points où un diamètre de Newton la rencontre sont concourantes.

La hessienne du trèfle équilatéral est une cubique identique ayant les mêmes asymptotes et les mêmes axes de symétrie.