Nouvelles annales de mathématiques

André Cazamian

Applications de la méthode de transformation par polaires réciproques à des théorèmes relatifs aux cubiques unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 300-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__300_1>

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR POLAIRES RÉCIPROQUES A DES THÉORÈMES RELATIFS AUX CUBIQUES UNICURSALES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Nous nous proposons d'appliquer la méthode des polaires réciproques à des théorèmes relatifs aux cubiques unicursales et notamment à des théorèmes énoncés par M. Astor (*Nouvelles Annales*, juillet 1892).

I.

Les cubiques unicursales peuvent se diviser en trois groupes :

1° Les cubiques cuspidales;

2° Les cubiques nodales circulaires. Ce sont les podaires de la parabole, et, par suite, les figures inverses de coniques en plaçant le centre d'inversion sur la conique.

Leurs polaires réciproques sont des quartiques de troisième classe qui peuvent être envisagées comme les antipodaires de coniques par rapport à un point pris sur la courbe.

3° Les cubiques nodales quelconques. Leurs polaires réciproques sont des quartiques de troisième classe.

Cubiques cuspidales. — A toute propriété transformable par polaires réciproques et relative aux cubiques cuspidales, correspond une propriété corrélative se rapportant au même groupe de cubiques. Cela résulte du théorème suivant, qui est évident :

La polaire réciproque d'une cubique cuspidale est une cubique cuspidale.

En particulier :

La polaire réciproque d'une cissoïde de Dioclès est une développée de parabole.

C'est une conséquence de cette propriété bien connue que les projections du foyer d'une parabole sur ses normales décrivent une parabole ayant ce foyer pour sommet, et l'on sait que la figure inverse d'une parabole, par rapport à son sommet, est une cissoïde droite.

En transformant par polaires réciproques plusieurs propriétés connues des cubiques cuspidales, nous obtiendrons des propriétés relatives aux mêmes cubiques.

Théorèmes.	Théorèmes corrélatifs.
Si, par les points de rencontre d'une droite avec une	Si, par un point quelconque, on mène les trois tangentes à

cubique (cuspidale) [1], on mène les tangentes à la cubique, ces trois tangentes rencontrent de nouveau la courbe en trois points en ligne droite,

une cubique cuspidale, les tangentes menées à la cubique par les points de contact sont concourantes.

Si, autour d'un point fixe d'une conique cuspidale, on fait tourner une sécante, le lieu du point de concours des tangentes menées aux points de rencontre de la sécante avec la cubique est une conique.

La corde des contacts des tangentes menées à une cubique cuspidale par un point quelconque pris sur une tangente fixe à la cubique, enveloppe une conique.

La hessienne d'une cubique cuspidale est la droite joignant le point de rebroussement au point d'inflexion; par conséquent, le lieu des points d'où l'on peut mener à une cubique cuspidale trois tangentes dont les points de contact soient en ligne droite, est la droite précédente.

La cayleyenne d'une cubique cuspidale est réduite à un point : le point de rencontre de la tangente de rebroussement avec la tangente d'inflexion, donc les cordes de contact passent par ce point [2].

En transformant la première de ces propositions par polaires réciproques, on obtient la seconde, et la seconde conduit à la première.

Les points de contact des tangentes menées à une cu-

Les tangentes à une cubique cuspidale, aux points de

---

(1) Nous mettons le mot entre parenthèses, pour indiquer que la propriété s'applique à une cubique quelconque.

(2) M. Balitrand (*Nouvelles Annales*, novembre 1893) démontre ces deux propositions pour la cissoïde; c'était bien inutile, elles s'appliquent à une cubique cuspidale quelconque.

bique cuspidale par un point quelconque sont sur une conique tangente au point de rebroussement à la tangente de rebroussement.

rencontre avec une droite quelconque, touchent une conique tangente au point d'inflexion à la tangente inflexionnelle.

L'enveloppe des cordes d'une cubique cuspidale vues du point de rebroussement sous un angle droit est une conique.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une cubique cuspidale, dont le point d'inflexion est à l'infini, est une conique.

Exemple. — L'enveloppe des cordes d'une cissoïde vues du point de rebroussement sous un angle droit est une hyperbole ayant ce point pour sommet.

Exemple. — Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une développée de parabole est une parabole.

La polaire harmonique du point d'inflexion d'une cubique cuspidale est la tangente de rebroussement

Si par un point pris sur la tangente de rebroussement d'une cubique cuspidale on mène à la cubique les deux tangentes, la conjuguée de la tangente de rebroussement par rapport à ces deux tangentes passe par le point d'inflexion.

Le lieu des points de rebroussement des cubiques cuspidales tangentes aux trois côtés d'un triangle en trois points en ligne droite est une conique inscrite dans le triangle.

L'enveloppe des tangentes de rebroussement est une quartique de troisième classe.

L'enveloppe des tangentes inflexionnelles des cubiques cuspidales tangentes en trois points donnés à trois droites concourantes est une conique circonscrite au triangle des trois points.

Le lieu des points d'inflexion est une cubique unicursale.

Si l'on considère sur une cubique cuspidale une suite de points A_0, A_1, A_2, ..., A_n tels que la tangente en cha-

Une tangente TT' touchant une cubique cuspidale au point A_0, par ce point on mène la tangente A_0A_1 autre cun de ces points rencontre la courbe au point suivant, la position limite du point A_n est le point de rebroussement (1).

que TT′: par le point de contact A_1 on mène la tangente A_1A_2, etc.; la tangente limite vers laquelle on tend est la tangente inflexionnelle.

Cubiques unicursales quelconques. — La transformation par polaires réciproques nous fournira des propriétés des *quartiques de troisième classe.*

Une cubique crunodale a un point d'inflexion réel et deux points d'inflexion imaginaires conjugués.

Si les points de contact de la tangente double d'une quartique de troisième classe sont réels, une seule tangente de rebroussement est réelle, les deux autres points de rebroussement sont imaginaires conjugués.

Une cubique acnodale a trois points d'inflexion réels.

Si les points de contact de la tangente double d'une quartique de troisième classe sont imaginaires, les trois tangentes de rebroussement sont réelles.

Les trois points d'inflexion sont en ligne droite.

Les trois tangentes de rebroussement sont concourantes.

Si une cubique nodale a trois points d'inflexion réels, le point double est le pôle de la droite qui joint les trois points par rapport au triangle formé par les trois tangentes inflexionnelles (Salmon, *Courbes planes*).

Si une quartique de troisième classe a trois tangentes de rebroussement réelles, la tangente double est la polaire du point de concours des tangentes de rebroussement par rapport au triangle formé par les trois points de rebroussement.

(1) *Voir* le problème du Concours général de 1880. On demandait la limite des points A_n et A_{-n}. On voit que la première étant trouvée, on obtenait la seconde en transformant par polaires réciproques.

Si la droite des inflexions est à l'infini, le point double est le point de concours des médianes du triangle des asymptotes.

Si le point de concours des tangentes de rebroussement est le centre de gravité du triangle des points de rebroussement, la tangente double est la droite de l'infini.

Si autour d'un point d'inflexion d'une cubique (nodale) on fait tourner une transversale, et qu'aux deux points où elle coupe la courbe on mène des tangentes, leur point de concours engendrera une ligne droite D. La droite D rencontre chaque transversale en un point qui est le conjugué harmonique du point d'inflexion par rapport aux deux points où la transversale rencontre de nouveau la courbe.

Si par un point P pris sur une tangente de rebroussement, on mène les deux tangentes à une quartique de troisième classe, la droite joignant les points de contact passe par un point fixe. La droite joignant le point P à ce point est la conjuguée harmonique de la tangente de rebroussement par rapport aux deux tangentes issues de P.

Si la cubique est nodale, la droite D est celle qui joint le point double au point de contact de la tangente menée par le point d'inflexion.

Le point fixe est le point d'intersection de la tangente double avec la tangente à la quartique au point où elle est rencontrée par la tangente de rebroussement.

La cayleyenne d'une cubique nodale est, en négligeant le point double, une conique touchant les tangentes doubles aux points de rencontre avec la droite des inflexions.

Le lieu des points tels que les tàngentes menées de chacun d'eux à une quartique de troisième classe aient leurs points de contact en ligne droite est une conique touchant, aux deux points de contact avec la tangente double, les droites joignant ces deux points de contact au point de concours de la tangente de rebroussement.

Si les tangentes au point

Si la quartique touche la

double sont isotropes, la cayleyenne est une conique ayant ce point pour foyer.

Si l'on considère la hessienne d'une cubique nodale, trois des tangentes menées d'un point quelconque de cette courbe à la cubique ont leurs points de contact en ligne droite. Le point de rencontre de cette droite avec celle qui joint le quatrième point de contact au point double se trouve sur la hessienne.

La corde polaire d'un point d'une cubique unicursale enveloppe une conique Σ inscrite à l'angle des tangentes au point double aux points où elles sont coupées par la droite des inflexions (ASTOR).

Si les tangentes au point double sont isotropes, la conique Σ a un foyer au point double.

Les droites joignant le point double d'une cubique aux points de contact des deux tangentes menées à la cubique par un point quelconque pris sur la cubique forment avec droite de l'infini aux points cycliques (hypocycloïde à trois rebroussements), le lieu précédent est un cercle.

L'enveloppe des droites, telles que les tangentes en trois de leurs points de rencontre avec une quartique de troisième classe soient concourantes, est une quartique de troisième classe.

La droite, joignant le point de concours au point de rencontre de la quatrième tangente avec la tangente double, touche la même quartique.

Une tangente quelconque à une quartique de troisième classe rencontrant la courbe en deux points, si l'on mène les tangentes en ces points, leur point de concours décrit une conique tangente aux deux droites joignant le point de concours des tangentes de rebroussement aux points de contact de la quartique avec sa tangente double, et touchant ces droites en ces points.

Si la quartique est une hypocycloïde à trois rebroussements, la conique est un cercle.

Si l'on mène une tangente quelconque à une quartique de troisième classe et les tangentes aux points où elle rencontre de nouveau la courbe, ces deux dernières coupent la les tangentes au nœud un faisceau harmonique (Astor).

En particulier, si le point double est un foyer, la corde polaire d'un point quelconque de la courbe est vue du point double sous un angle droit.

L'enveloppe des cordes d'une cubique unicursale vues du point double sous un angle droit est une conique.

Si les tangentes au point double sont isotropes, la conique a un foyer au point double, et la directrice correspondante est la droite des inflexions.

Si la cubique est une strophoïde, la conique est une parabole dont la directrice passe par le point double.

L'enveloppe des cordes de la cubique de l'Hospital (antipodaire de la parabole par rapport à son foyer), vues de ce foyer sous un angle droit, est une conique ayant ce point pour foyer.

Les deux tangentes au point double d'une cubique étant réelles, si d'un point de la

tangente double en deux points qui forment une division harmonique avec les points de contact de la tangente double.

En particulier, si la quartique est une hypocycloïde à trois rebroussements, les tangentes menées à la courbe aux points où elle est rencontrée par une tangente quelconque sont rectangulaires.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une quartique dont la tangente double est la droite de l'infini est une conique.

Si la quartique est une hypocycloïde à trois rebroussements, le lieu précédent est un cercle ayant son centre au point de concours des tangentes de rebroussement.

Le lieu des sommets des angles droits, circonscrits à une antipodaire d'hyperbole équilatère relativement à un point pris sur l'hyperbole, est une hyperbole équilatère.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la cardioïde est un cercle (Laguerre).

Lorsqu'une quartique de troisième classe n'a qu'un point de rebroussement réel, courbe A_1 on peut mener deux tangentes réelles, il n'y a qu'un des points de contact, A_2 par exemple, d'où l'on puisse mener de nouveau des tangentes réelles; alors de A_2 on mène la tangente dont le point de contact, A_3, jouit de la même propriété, etc. Le point limite vers lequel on tend est le point d'inflexion de la cubique (ASTOR).

si une tangente à la quartique la rencontre en deux points réels A_2, A_3, il n'y a qu'un des points de rencontre, A_2, tel que la tangente en ce point rencontre la courbe en deux points réels; alors on mène la tangente en A_2, etc. La tangente limite vers laquelle on tend ainsi est la tangente de rebroussement réelle.