

ROMUALD BLAZEIEVSKI

Sur un problème de géométrie plane

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 28-40

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__28_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

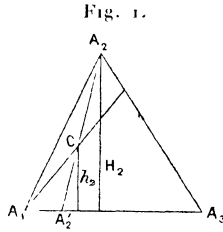
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PLANE;

 PAR M. ROMUALD BLAZEJEVSKI.

 RELATIONS ENTRE LES DISTANCES D'UN POINT DU PLAN
 AUX SOMMETS D'UN TRIANGLE.

 Supposons qu'un point C (*fig. 1*) est joint aux sommets A_1, A_2, A_3 par les droites A_1C, A_2C, A_3C : dési-

 gnons par $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les segments $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3$, par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les distances A_1C, \dots , nous avons le théorème (Euler) exprimé par l'équation

$$(1) \quad \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} - \frac{\varepsilon_2}{\omega_2} - \frac{\varepsilon_3}{\omega_3} = 2.$$

 En effet, soient h_2, H_2 les hauteurs des triangles $A_1CA_3, A_1A_2A_3$ ayant A_1A_3 pour base, nous avons

$$\begin{aligned} \text{surf. } A_1CA_3 : \text{surf. } A_1A_2A_3 \\ = h_2 : H_2 = CA'_2 : A_2A'_2 = \omega_2 - \varepsilon_2 : \omega_2. \end{aligned}$$

 De la même façon, eu égard aux triangles A_1CA_2, A_2CA_3 ,

$$\begin{aligned} \text{surf. } A_1CA_2 : \text{surf. } A_1A_2A_3 &= \omega_3 - \varepsilon_3 : \omega_3. \\ \text{surf. } A_2CA_3 : \text{surf. } A_1A_2A_3 &= \omega_1 - \varepsilon_1 : \omega_1. \end{aligned}$$

La somme des premiers termes est égale à $A_1 A_2 A_3$; ainsi

$$1 = \frac{\omega_1 - z_1}{\omega_1} + \frac{\omega_2 - z_2}{\omega_2} + \frac{\omega_3 - z_3}{\omega_3},$$

et après quelques réductions nous avons l'équation (1). Si le triangle doit être réel, les z doivent satisfaire à une seconde condition. Nommons $\theta_1 = \widehat{A_2 C A_3}$, $\theta_2 = \widehat{A_3 C A_1}$, $\theta_3 = \widehat{A_1 C A_2}$, A le double de la surface du triangle, nous avons

$$\omega_1 z_2 \sin \theta_3 + \omega_1 z_3 \sin \theta_2 = A,$$

$$\omega_2 z_1 \sin \theta_3 + \omega_2 z_3 \sin \theta_1 = A,$$

$$\omega_3 z_1 \sin \theta_2 + \omega_3 z_2 \sin \theta_1 = A,$$

ou bien, en résolvant par rapport à $\sin \theta_1$,

$$\frac{D \sin \theta_1}{A} = \begin{vmatrix} 1 & \omega_1 z_3 & \omega_1 z_2 \\ 1 & 0 & \omega_2 z_1 \\ 1 & \omega_3 z_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 0 & \omega_1 z_3 & \omega_1 z_2 \\ \omega_2 z_3 & 0 & \omega_2 z_1 \\ \omega_3 z_2 & \omega_3 z_1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D \sin \theta_1 = A(-z_1^2(\omega_2 \omega_1 + z_1 z_2 \omega_1 \omega_3 + z_1 z_3 \omega_1 \omega_2)),$$

ou, d'après l'équation (1),

$$\begin{aligned} D \sin \theta_1 &= A \left(-\frac{z_1}{\omega_1} + \frac{z_2}{\omega_2} + \frac{z_3}{\omega_3} \right) z_1 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ &= 2A \omega_1 \omega_2 \omega_3 z_1 \left(1 - \frac{z_1}{\omega_1} \right). \end{aligned}$$

Pour la réalité de θ_1 , on doit avoir

$$\left| 2A \omega_1 \omega_2 \omega_3 z_1 \left(1 - \frac{z_1}{\omega_1} \right) \right| < |D|,$$

et deux autres inégalités doivent avoir lieu :

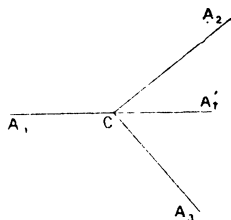
$$\left| 2A \omega_1 \omega_2 \omega_3 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{\omega_2} \right) \right| < |D|,$$

$$\left| 2A \omega_1 \omega_2 \omega_3 z_3 \left(1 - \frac{z_3}{\omega_3} \right) \right| < |D|.$$

Les z choisis d'après les conditions exprimées par les

inégalités et par l'équation (1) permettent de construire le triangle $A_1 A_2 A_3$. Faisons (*fig. 2*) $A_1 C = z_1$, $\widehat{A_1 C A_2} = \theta_3$, $A_1 C A_3 = \theta_2$, $CA_2 = z_2$, $CA_3 = z_3$: pre-

Fig. 2.



nons $A_1 A'_1$ pour l'axe des x , la perpendiculaire en C à $A_1 A'_1$ pour l'axe des y . Nous avons, pour les coordonnées de A'_1 , A_2 , A_3 ,

$$\begin{array}{l} A'_1 \dots\dots\dots \omega_1 - z_1, \quad 0, \\ A_2 \dots\dots\dots - z_2 \cos \theta_3, \quad z_2 \sin \theta_3, \\ A_3 \dots\dots\dots - z_3 \cos \theta_2, \quad - z_3 \sin \theta_2. \end{array}$$

La surface du triangle $A_1 A_2 A_3$ sera la moitié de l'expression

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 - z_1 & 0 \\ 1 & -z_2 \cos \theta_3 & z_2 \sin \theta_3 \\ 1 & -z_3 \cos \theta_2 & -z_3 \sin \theta_2 \end{vmatrix} \\ - z_2 z_3 (\sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3) \\ + (\omega_1 - z_1) (z_2 \sin \theta_3 + z_3 \sin \theta_2),$$

ou bien

$$z_2 z_3 \sin(2\pi - \theta_1) + (\omega_1 - z_1) (z_2 \sin \theta_3 + z_3 \sin \theta_2).$$

D'après les valeurs des sinus des angles θ_1 , θ_2 , θ_3 données tout à l'heure, cette expression est proportionnelle à

$$\dots z_2 z_3 z_1 \left(1 - \frac{z_1}{\omega_1}\right) \\ + (\omega_1 - z_1) \left[z_2 z_3 \left(1 - \frac{z_3}{\omega_3}\right) + z_3 z_2 \left(1 - \frac{z_2}{\omega_2}\right) \right].$$

Selon le théorème d'Euler cette quantité s'annule. Ainsi les points A_2, A_3, A'_1 sont situés sur une ligne droite. De même A'_1 est sur la droite $A_2 A_3$, A'_3 sur $A_1 A_2$. Parmi les triangles construits d'après cette méthode, il peut s'en rencontrer de tels que z_1, z_2, z_3 soient les bissectrices des angles A_1, A_2, A_3 . En donnant cette condition, nous avons un problème déterminé : soient w_1, w_2, w_3 les bissectrices du triangle données en longueur, mais non en position, trouver le triangle.

THÉORÈMES SUR LES BISSECTRICES.

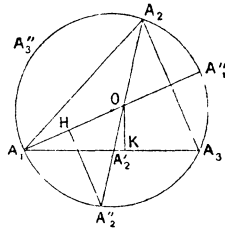
THÉORÈME I. — *Décrivons le cercle circonscrit à $A_1 A_2 A_3$, soit A''_2 le milieu de l'arc $A_1 A_3$, on a la relation*

$$A_1 A''_2 : A''_2 O = A_2 O : A_2 A'_1.$$

En effet (*fig. 3*), d'après la construction,

$$\begin{aligned} \widehat{A_1 A_2 A''_2} &= \widehat{A''_2 A_1 A_3}, & \widehat{A_2 A_1 A'_1} &= \widehat{A_3 A_1 A''_1}, \\ \frac{1}{2} A''_2 A_1 &= \frac{1}{2} A''_2 A_3, & \frac{1}{2} A_3 A'_1 &= \frac{1}{2} A'_1 A_2, \end{aligned}$$

Fig. 3.



en désignant $A''_2 A_1, \dots$ les arcs $A''_2 A_1, \dots$; en ajoutant

$$\frac{1}{2}(A''_2 A_1 + A_2 A''_1) = \frac{1}{2}(A''_2 A_3 + A_3 A''_1),$$

c'est-à-dire les angles $A_1 O A''_2, A''_2 A_1 O$ sont égaux, et, par suite,

$$A_1 A''_2 = A''_2 O.$$

Les triangles $A_1 A_2 A_2''$, $A_1 A_2' A_2''$ sont semblables, ayant

$$\widehat{A_2'' A_1 A_2} = \widehat{A_1 A_2' A_2''},$$

et l'angle $A_1 A_2' A_2''$ commun. Nous pouvons conclure la relation

$$A_1 A_2'' : A_2 A_2'' = A_2' A_2'' : A_1 A_2'';$$

mais comme $A_1 A_2'' = A_2'' O$,

$$A_2'' O : A_2 A_2'' = A_2' A_2'' : A_2'' O;$$

mais $A_2 A_2'' = OA_2 + OA_2''$, $A_2' A_2'' = OA_2 + OA_2'' - A_2 A_2'$, en désignant $A_1 A_2''$ par ζ_2 , OA_2 par z_2 , $A_2 A_2'$ par ω_2 , nous avons

$$(2) \quad \zeta_2 : z_2 + \zeta_2 = z_2 + \zeta_2 - \omega_2 : \zeta_2, \quad (2z_2 - \omega_2)\zeta_2 = z_2(\omega_2 - z_2).$$

THÉORÈME II. — Soit D le diamètre $2OK$ du cercle inscrit, nous avons

$$OA_2'' : \frac{1}{2} A_1 O = OA_3 : \frac{1}{2} D.$$

En effet, $\widehat{A_1 A_2'' O} = \widehat{A_1 A_3 A_2}$, car ces angles, inscrits dans le cercle, s'appuient sur le même arc $A_1 A_2$; $A_2'' H$ est la hauteur du triangle équilatéral $A_2'' A_1 O$; les triangles rectangles $A_2'' HO$, KOA_3 , ayant égaux les angles aigus, sont semblables et nous avons la relation ci-dessus, qu'on peut écrire

$$(3) \quad \zeta_2 = \frac{z_1 z_3}{D}.$$

UNE MÉTHODE POUR S'ASSURER QUE LE PROBLÈME A DES SOLUTIONS RÉELLES, QUELLES QUE SOIENT LES VALEURS ARBITRAIRES ω_1 , ω_2 , ω_3 .

Faisant une substitution circulaire des indices dans (2) et (3), nous avons

$$(4) \quad \zeta_2(2z_1 - \omega_1) = z_1(\omega_1 - z_1), \quad D\zeta_1 = z_2 z_3,$$

$$(5) \quad \zeta_3(2z_3 - \omega_3) = z_3(\omega_3 - z_3), \quad D\zeta_3 = z_1 z_2.$$

Ces six équations et l'équation (1) déterminent les inconnues z , mais l'élimination est très laborieuse, comme nous verrons plus loin. Ainsi nous choisirons la méthode géométrique suivante. Supposons

$$m_1 = \frac{w_1}{w_2 w_3}, \quad m_2 = \frac{w_2}{w_1 w_3}, \quad m_3 = \frac{w_3}{w_1 w_2},$$

$$\frac{\bar{z}_1}{w_1} = x_1, \quad \frac{\bar{z}_2}{w_2} = x_2, \quad \frac{\bar{z}_3}{w_3} = x_3,$$

$$\frac{\zeta_1}{w_1} = y_1, \quad \frac{\zeta_2}{w_2} = y_2, \quad \frac{\zeta_3}{w_3} = y_3;$$

alors les équations données par le théorème I prennent la forme

$$y(2x-1) = x(1-x),$$

c'est-à-dire les points $x_i, y_i (i = 1, 2, 3)$ sont sur une conique. En outre, nous avons

$$D m_1 y_1 = x_2 x_3, \quad D m_2 y_2 = x_1 x_3,$$

$$D m_3 y_3 = x_1 x_2, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Introduisons une variable u déterminée par

$$x_1 x_2 x_3 = D u,$$

$$m_1 x_1 y_1 = u, \quad m_2 x_2 y_2 = u, \quad m_3 x_3 y_3 = u.$$

Le point x_1, y_1 est sur l'intersection de deux courbes du second degré,

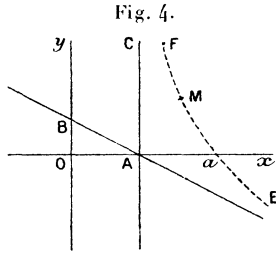
$$y(2x-1) - x(1-x) = 0, \quad m_1 xy = u.$$

Laissant pour une autre occasion la discussion du cas où $x > 1$, remarquons cette propriété intéressante de ces courbes qu'elles ont un seul point d'intersection. En effet, la première est une hyperbole passant par l'origine et le point $x = 1$ dont les asymptotes sont les droites

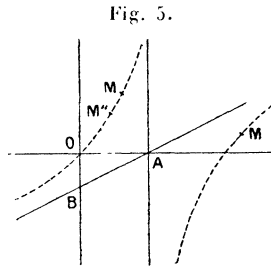
$$x - \frac{1}{2} = 0, \quad 4y + 2x - 1 = 0;$$

la seconde courbe est une hyperbole ayant pour asym-

ptotes les axes des coordonnées (*fig. 4*). L'intersection de ces deux courbes peut être située seulement sur la



branche FME. Remarquons que pour $x > 1$ ou $x < \frac{1}{2}$ la première hyperbole a la forme de la *fig. 5*. Faisons varier u depuis 0 jusqu'à l'infini : pour $u = 0$ on a $y = 0, x = 1$; pour $u = \infty, x = \frac{1}{2}$. La somme des va-



leurs des x varie depuis le maximum 3 jusqu'à $\frac{3}{2}$. La condition $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ sera remplie pour de certaines valeurs des x renfermées entre les limites 1 et $\frac{1}{2}$, car la dérivée $\frac{dx}{du}$ reste négative pour toutes les valeurs réelles de u . Nous avons

$$m_1 \frac{x^2(1-x)}{2x-1} = u;$$

prenant la dérivée, on trouve

$$\frac{dx}{du} = \frac{(2x-1)^2}{m_1 x(-2+5x-x^2)};$$

le dénominateur n'a pas d'autres racines réelles, excepté $x = 0$, mais cette valeur n'est pas renfermée dans les limites données pour la variation de x . Ainsi $x_1 + x_2 + x_3$, passant de la valeur 3 à la valeur $\frac{3}{2}$, prendra, pour une certaine valeur de u , la valeur 2, ce qui est la condition du problème.

SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME.

Éliminant les y , nous avons

$$m_1 D = \frac{(2x_1 - 1)x_2 x_3}{x_1(1 - x_1)}, \quad m_2 D = \frac{(2x_2 - 1)x_1 x_3}{x_2(1 - x_2)},$$

$$m_3 D = \frac{(2x_3 - 1)x_1 x_2}{x_3(1 - x_3)}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Supposons que x_1, x_2, x_3 soient les racines d'une équation du troisième degré

$$t^3 - 2t^2 + yt - \frac{q}{z}(y - 1) = 0 :$$

y et z sont les nouvelles inconnues, q est une constante; posons

$$h = m_1 + m_2 + m_3,$$

$$k = m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3.$$

$$l = m_1 m_2 m_3.$$

D'après la théorie des fonctions symétriques, on trouve

$$(A) \quad \frac{f}{x} = 5 + \frac{z(y - 1)}{z - q} - \frac{y^2 z}{q(y - 1)},$$

$$(B) \quad q - z = 4x^2(y - 1)(z - 2q) + qx^2,$$

$$(C) \quad (q - z)z = (8q - 3z)x^3 + 4(z - 2q)yx^3,$$

en substituant au lieu de D la quantité

$$r = \frac{1}{D\sqrt{k}},$$

et posant

$$hD = \frac{f}{x}, \quad lD^3 = \frac{q}{x^3}, \quad q_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Retranchant l'équation (B) de (C) après avoir multiplié par x , nous avons $x^3 - x + z = 0$. Il est intéressant que x_1, x_2, x_3 peuvent être exprimés comme fonctions elliptiques de la même variable. Nous avons

$$\begin{aligned} m_1 q_0 x(1 - x_1) &= xx_2 x_3(2x_1 - 1), \\ m_2 q_0 x_2(1 - x_2) &= xx_1 x_3(2x_2 - 1). \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Par une simple transformation, nous trouvons

$$\begin{aligned} m_1 q_0 x_1(1 - x_1) - m_2 q_0 x_2(1 - x_2) \\ = xx_3(x_1 - x_2) = 2xx_1 - xx_1^2 - (2xx_2 - xx_2^2). \end{aligned}$$

Ainsi le polynome

$$xF = m_i q_0 x_i(1 - x_i) - 2xx_i + xx_i^2$$

n'éprouve aucun changement quand on permute les indices i : c'est une fonction symétrique de x_i . Répétant la méthode par laquelle nous avons trouvé l'équation (A), nous avons

$$\frac{f}{x} = 3 + \frac{1 + F}{z - q} z + \frac{Fyz}{q(y - 1)};$$

en comparant avec A, nous avons

$$\frac{Fz(yz - q)}{q(z - q)(y - 1)} = \frac{yz - 2q}{z - q} - \frac{y^2 z}{q(y - 1)};$$

mais la seconde partie de l'équation est divisible par $yz - q$, comme on peut le vérifier facilement. Ainsi

$$zF = q(y - 1) - y(z - q) - q.$$

(37)

A l'aide des équations (A), (B), (C), on a

$$F = 1 + \frac{q-x}{4x^3},$$

et nous avons l'équation

$$(x - m_1 q_0) x_1^2 + (m_1 q_0 - 2x) x_1 = x + \frac{q-x}{4x^2},$$

avec deux autres analogues. En résolvant par rapport à x_1 , on trouve sous le radical un polynôme du quatrième degré.

NOTE A L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

Pour être bref, nous avons donné les résultats de la transformation des équations par les fonctions symétriques sans aucune preuve; pour remplir cette lacune reprenons les équations

$$m_1 D = \frac{(2x_1-1)x_2x_3}{x_1(1-x_1)}, \quad m_2 D = \frac{(2x_2-1)x_1x_3}{x_2(1-x_2)}, \\ m_3 D = \dots, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Les quantités x_2, x_3 sont racines de l'équation

$$t^2 + (x_1 - 2)t + x_1^2 - 2x_1 + y = 0,$$

c'est-à-dire

$$x_2 x_3 = x_1^2 - 2x_1 + y,$$

$$(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1^2 - x_1 + y - 1.$$

La fonction de x_1 entrant dans $m_1 D$ peut être représentée par

$$\frac{2x_1-1}{x_1(1-x_1)} = \frac{1}{1-x_1} - \frac{1}{x_1}.$$

Ainsi

$$m_1 D = \frac{x_1^2 - 2x_1 + y}{1-x_1} - \frac{x_1^2 - 2x_1 + y}{x_1} = 3 - 2x_1 + \frac{y-1}{1-x_1} - \frac{y}{x_1}.$$

Multipliant les numérateurs et les dénominateurs des fractions

$\frac{1}{1-x_1}, \frac{1}{x_1}$ par $(1-x_2)(1-x_3)$, x_2x_3 et remarquant que

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = y-1 - \frac{q}{z}(y-1) = (y-1)\left(1 - \frac{q}{z}\right),$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{q}{z}(y-1),$$

nous avons

$$m_1D = 3 - 2x_1 + \frac{x_1^2 - x_1 + y - 1}{1 - \frac{q}{z}} - \frac{y(x_1^2 - 2x_1 + y)}{\frac{q}{z}(y-1)};$$

mais, d'après la théorie des équations,

$$\Sigma x_1^2 = (\Sigma x_1)^2 - 2\Sigma x_1x_2 = 4 - 2y;$$

ainsi nous avons la formule (A)

$$(A) \quad hD = 5 + \frac{y-1}{1 - \frac{q}{z}} - \frac{y^2}{\frac{q}{z}(y-1)}.$$

Le produit $m_3m_2D^2$ est exprimé par

$$\begin{aligned} & \frac{(2x_3-1)(2x_2-1)x_1^2}{(1-x_3)(1-x_2)} = \frac{(4x_1^2 - 6x_1 + (y-3)x_1^2)}{x_1^2 - x_1 + y - 1} \\ & = 4x_1^2 - (2x_1 + 1) + \frac{(2y-3)x_1 + y - 1}{x_1^2 - x_1 + y - 1}; \end{aligned}$$

multipliant la fraction par $1-x_1$ et divisant par la même quantité, nous aurons au dénominateur

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = (y-1)\left(1 - \frac{q}{z}\right),$$

ainsi

$$m_2m_3D^2 = 4x_1^2 - (2x_1 + 1) + \frac{y-1 + (y-2)x_1 - (2y-3)x_1^2}{(y-1)\left(1 - \frac{q}{z}\right)};$$

l'équation (B) de l'article précédent est

$$kD^2 = 4(4-2y) - 4 - 3 + \frac{y-1 + 2(y-2) - (2y-3)(4-2y)}{(y-1)\left(1 - \frac{q}{z}\right)},$$

$$kD^2 = 9 - 8y + \frac{4y-7}{1 - \frac{q}{z}}.$$

L'équation (C) est le résultat de la substitution de $t = \frac{1}{2}$,
 $t = 1$ dans le premier membre de l'équation

$$t^3 - 2t^2 + yt - \frac{q}{z}(y-1) = 0 = ft,$$

$$m_1 m_2 m_3 D^3 = \frac{x_1 x_2 x_3 (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)(2x_3 - 1)}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)} = \frac{8f(0)f(\frac{1}{2})}{f(1)},$$

$$8f\left(\frac{1}{2}\right) = (1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3) = 4\left(1-2\frac{q}{z}\right)y + 8\frac{q}{z} - 3,$$

$$f(1) = (y-1)\left(1-\frac{q}{z}\right), \quad f(0) = -\frac{q}{z}(y-1),$$

$$D^3 = -\frac{q}{q-z} \left[4y\left(1-\frac{2q}{z}\right) + \frac{8q}{z} - 3 \right].$$

Chassant les dénominateurs, on trouve l'équation (C).

Nous avons posé l'équation

$$m_1 q_0 x_1(1-x_1) - 2x x_1 + x x_1^2 = xF,$$

désignant par F une fonction symétrique des racines de l'équation $f(t) = 0$. Divisant par $x x_1(1-x_1)$, on trouve

$$\frac{m_1 q_0}{x} + \frac{x_1 - 2}{1-x_1} = \frac{F}{x_1(1-x_1)},$$

$$\frac{m_1 q_0}{x} = 1 + \frac{1+F}{1-x_1} + \frac{F}{x_1}, \quad \frac{q_0}{x} = D,$$

$$\Sigma m_1 D = 3 + (1F)\Sigma \frac{1}{1-x_1} + F\Sigma \frac{1}{x_1}.$$

Par la théorie des fonctions symétriques, nous avons

$$\Sigma m_1 D = 3 + \frac{(1+F)z}{z-q} + \frac{Fyz}{q(y-1)};$$

mais nous avons pour $\Sigma m_1 D$ l'équation (A). Ainsi

$$3 + \frac{(1+F)z}{z-q} + \frac{Fyz}{q(y-1)} = 5 + \frac{(y-1)}{z-q} - \frac{y^2 z}{q(y-1)},$$

$$F \left[\frac{z}{z-q} + \frac{yz}{q(y-1)} \right] = 2 + \frac{(y-2)z}{z-q} - \frac{y^2 z}{q(y-1)},$$

$$\frac{Fz(yz-q)}{q(z-q)(y-1)} = \frac{yz-2q}{z-q} - \frac{y^2 z}{q(y-1)}.$$

Il est facile de constater que $yz - q$ entre comme facteur dans le second membre de l'équation; chassant les dénominateurs et divisant par $yz - q$, on trouve

$$Fz = -2q(1-y) - zy.$$

Les équations (B), (C) donnent

$$\begin{aligned} 4(2q - z)x^2y &= (9q - 4z)x^2 + z - q, & z &= x - x^3, \\ 4F(1 - x^2)x^3 &= 8qx^2 - (9q - 4z)x^2 - z + q \\ &= -qx^2 + 4x^2z - z + q. \end{aligned}$$

Pour $x = 1$, z s'annule; ainsi la seconde partie de l'équation est divisible par $1 - x$, ainsi que par $1 + x$. On a, après avoir divisé les deux membres de l'équation par $1 - x^2$.

$$4Fx^3 - q + \frac{(4x^2 - 1)z}{-x^2 + 1} = q + \frac{(4x^2 - 1)(x - x^3)}{-x^2 + 1} = q - x + 4x^3.$$

L'inconnue x_1 est déterminée par l'équation

$$(x - m_1q_0)x_1^2 + (m_1q_0 - 2x)x_1 = x + \frac{q - x}{4x^2},$$

dont le discriminant est

$$(m_1q_0 - 2x)^2 + 4(x - m_1q_0)\left(x + \frac{q - x}{4x^2}\right);$$

désignons-le par

$$\frac{R(x)}{4x^2}.$$

$R(x)$ étant un polynôme du quatrième degré, on a

$$2(m_1q_0 - 2x)x_1 + m_1q_0 - 2x = \frac{1}{2x}\sqrt{R(x)}.$$

Si l'on introduit une variable u

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

on aura x_1 fonction doublement périodique de u .