NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. DARIÈS

Sur la détermination des trajectoires orthogonales de quelques familles de courbes planes dont l'équation est donnée en coordonnées bi-polaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 283-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__283_1>

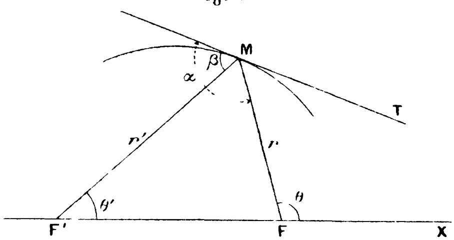
SUR LA DÉTERMINATION DES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DE QUELQUES FAMILLES DE COURBES PLANES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES BI-POLAIRES;

PAR M. G. DARIÈS,

Conducteur des Ponts et Chaussées.

Considérons une courbe plane (*fig.* 1) dont l'équation est donnée en coordonnées bi-polaires : désignons

Fig. 1.



par α et β les angles de la tangente en un point M avec

---

dont le paramètre sera déterminé par

$$\theta_1 + \frac{3}{c} = \frac{2}{c},$$

d'où

$$\theta_1 = -\frac{1}{c}.$$

C'est bien le paramètre du point où la tangente au point $\frac{1}{c}$ (c'est-à-dire l'asymptote) rencontre la courbe.

les rayons vecteurs r et r'; désignons encore par θ et θ' les angles polaires MFX et MF'X. On connaît, et il est facile d'établir, la relation

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{dr}{dr'};$$

il est presque évident que l'on a de même

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r\,d\theta}{r'\,d\theta'};$$

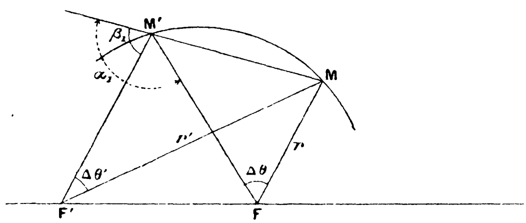
en effet, soit M' (*fig.* 2) le point de la courbe voisin de M; ses rayons vecteurs sont

$$r + \Delta r,\quad r' + \Delta r',$$

et ses angles polaires

$$\theta + \Delta\theta,\quad \theta' + \Delta\theta'.$$

Fig. 2.



Dans les triangles MM'F et MM'F', on a

$$\frac{r}{\sin\alpha_1} = \frac{MM'}{\sin\Delta\theta},\qquad \frac{r'}{\sin\beta_1} = \frac{MM'}{\sin\Delta\theta'},$$

d'où

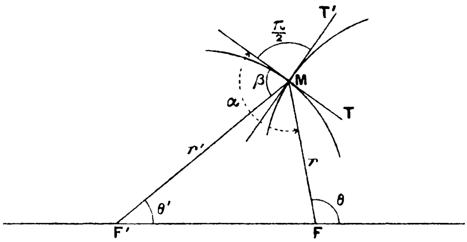
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{r}{r'}\,\frac{\sin\Delta\theta}{\sin\Delta\theta'} = \frac{r\,\Delta\theta}{r'\,\Delta\theta'}\;\frac{\dfrac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\dfrac{\sin\Delta\theta'}{\Delta\theta'}},$$

et, à la limite,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r\,d\theta}{r'\,d\theta'}.$$

Soient maintenant deux courbes orthogonales se coupant en M (*fig.* 3), en ce point ces courbes ont mêmes

Fig. 3.



coordonnées r et r' ou θ et θ', mais les angles α et β de l'une d'elles sont devenus $\alpha + \frac{\pi}{2}$ et $\beta + \frac{\pi}{2}$ pour la seconde; or

$$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

donc, d'après ce qui précède, pour passer d'une famille de courbes H à la famille orthogonale K, il suffit de remplacer dans l'équation différentielle de la première le rapport

$$\frac{dr}{dr'}$$

par le rapport

$$\frac{r\,d\theta}{r'\,d\theta'}.$$

Considérons plus particulièrement la famille de courbes dont l'équation bi-vectorielle est

$$f(r, r') = h,$$

h désignant une constante arbitraire; différentions, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial r}\,dr + \frac{\partial f}{\partial r'}\,dr' = 0;$$

on a donc pour les trajectoires orthogonales

$$\frac{\partial f}{\partial r} r\, d\theta - \frac{\partial f}{\partial r'} r'\, d\theta' = 0; \tag{1}$$

mais dans le triangle MFF′ on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}; \tag{2}$$

si entre les équations (1) et (2) on élimine le rapport $\frac{r}{r'}$, l'équation différentielle résultante sera celle des trajectoires orthogonales en coordonnées bi-angulaires, il ne restera plus qu'à l'intégrer.

Donnons quelques exemples.

Soit d'abord

$$f(r, r') = r^n \pm p r'^n = h,$$

on a successivement

$$r^{n-1}\, dr \pm p r'^{n-1}\, dr' = 0,$$

$$r^n\, d\theta \pm p r'^n\, d\theta' = 0,$$

$$\sin^n\theta'\, d\theta \pm p \sin^n\theta\, d\theta' = 0,$$

et enfin

$$\int \frac{d\theta}{\sin^n\theta} \pm p \int \frac{d\theta'}{\sin^n\theta'} = \mathrm{K},$$

K désignant une constante arbitraire.

1. $n = -1$, $p = 1$. (Licence. Paris, 1890.) — On a

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h;$$

on trouve pour les trajectoires orthogonales

$$\cos\theta + \cos\theta' = \mathrm{K}.$$

2. $n = 1$, $p = 1$. — On a

$$r \pm r' = h,$$

ellipses et hyperboles homofocales.

On obtient

$$\log\tang\frac{\theta}{2} \pm \log\tang\frac{\theta'}{2} = \log K,$$

hyperboles et ellipses homofocales.

3. $n = 1$. — On a

$$r + pr' = h,$$

ovales de Descartes.

Il vient

$$\tang\frac{\theta}{2}\tang^p\frac{\theta'}{2} = K.$$

4. $n = 2$. — On a

$$r^2 \pm r'^2 = h,$$

cercles concentriques et droites perpendiculaires à FF'.
On trouve

$$\cot\theta \pm \cot\theta' = K,$$

droites issues de l'origine et droites parallèles à FF'.

Soit encore

$$f(r, r') = r^n r'^p = h.$$

On a successivement

$$nr^{n-1} r'^p\, dr + pr^n r'^{p-1}\, dr' = 0$$

et

$$nr^n r'^p\, d\theta + pr^n r'^p\, d\theta' = 0,$$

ou

$$n\, d\theta + p\, d\theta' = 0,$$

enfin

$$n\theta + p\theta' = K.$$

Ce résultat est connu.

5. $n = p = 1$. — On a

$$rr' = h,$$

ovales de Cassini.

On obtient

$$\theta + \theta' = K,$$

hyperboles équilatères passant par F et F'.

6. $n = 1$, $p = 1$. (Licence. Bordeaux, 1880). — On a

$$\frac{r}{r'} = h.$$

cercles.

Il vient

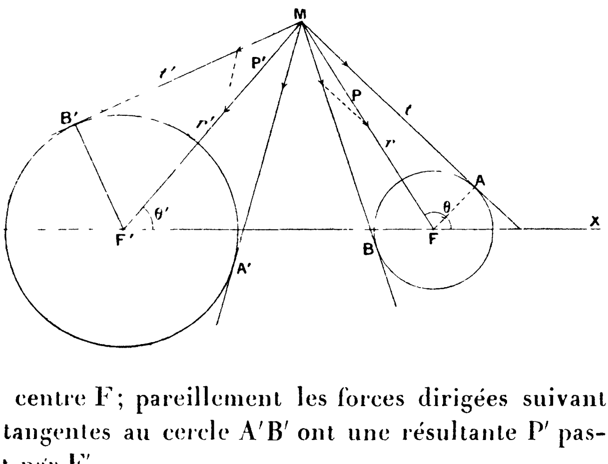
$$\theta - \theta' = K,$$

cercles passant par F et F'.

Problème. — *Un point matériel est attiré suivant les tangentes menées de ce point à deux cercles fixes en raison inverse de la longueur de ces tangentes. Trajectoires orthogonales des courbes de niveau.*

Les forces égales dirigées suivant les tangentes au cercle AB (*fig.* 4) ont une résultante P passant par

Fig. 4.



son centre F; pareillement les forces dirigées suivant les tangentes au cercle A'B' ont une résultante P' passant par F'.

Or

$$P = \frac{2\mu m}{t}\frac{t}{r} = \frac{2m\mu}{r};$$

$$P' = \frac{2m\mu'}{r'},$$

l'équation différentielle des courbes de niveau est

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\mu}{r}\cos\alpha + \frac{2\mu'}{r'}\cos\beta,$$

ou

$$\frac{2\mu}{r}dr + \frac{2\mu'}{r'}dr' = 0.$$

On a donc pour les trajectoires orthogonales

$$\mu\, d\theta + \mu'\, d\theta' = 0,$$

et, par suite,

$$\mu\theta + \mu'\theta' = K.$$

Si $\mu = \mu'$, les courbes de niveau sont les cassinoïdes

$$rr' = h,$$

et les trajectoires orthogonales les hyperboles équilatères

$$\theta + \theta' = K.$$

Problème. — *Un point matériel est attiré par deux pôles fixes; l'attraction de chacun d'eux est proportionnelle à une fonction donnée de l'angle polaire correspondant. Trajectoires orthogonales des courbes de niveau.*

On a pour les courbes de niveau

$$\frac{dV}{dt} = \mu\varphi(\theta)\cos\alpha + \mu'\varphi'(\theta')\cos\beta = 0,$$

ou bien

$$\mu\varphi(\theta)\, dr + \mu'\varphi'(\theta')\, dr' = 0,$$

et pour les trajectoires orthogonales

$$\mu\int\frac{\varphi(\theta)\,d\theta}{\sin\theta}+\mu'\int\frac{\varphi'(\theta')\,d\theta'}{\sin\theta'}=\mathrm{K}.$$

Si

$$\varphi(\theta)=\sin^2\theta,\qquad \varphi'(\theta')=\sin^2\theta',\qquad \mu=\mu',$$

on obtient

$$\cos\theta+\cos\theta'=\mathrm{k}:$$

les courbes de niveau sont donc (*Exemple* I)

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=h.$$

Problème. — *On considère la famille de courbes telle que pour chacune d'elles un arc élémentaire quelconque* PN $=$ *ds soit assimilable à une aiguille aimantée en équilibre sous l'action d'un aimant de pôles* F *et* F'. P *est le pôle positif de l'aiguille et* F *celui de l'aimant;* N *est le pôle négatif de l'aiguille et* F' *celui de l'aimant. Trajectoires orthogonales des courbes ainsi définies en supposant les attractions et répulsions proportionnelles aux puissances* $n^{\text{ièmes}}$ *de la distance.*

L'équation d'équilibre s'obtient en projetant les forces sur les normales PR et NS (*fig.* 5) à l'élément d'arc; on trouve sans difficulté

$$m\mu r'^n\sin\beta-m\lambda r^n\sin\alpha=m'\mu' r^n\sin\alpha-m'\lambda' r'^n\sin\beta.$$

Si l'on suppose

$$m\mu=m\lambda=m'\mu'=m'\lambda',$$

elle devient

$$r^n\sin\alpha=r'^n\sin\beta,$$

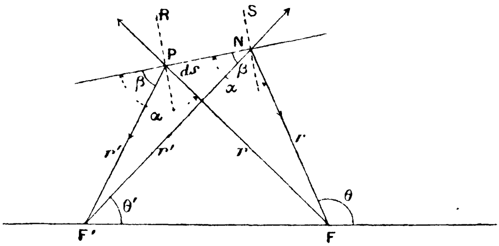
ou encore

$$\frac{d\theta}{\sin^{n+1}\theta}-\frac{d\theta'}{\sin^{n+1}\theta'}=0$$

et enfin

$$\int \frac{d\theta}{\sin^{n+1}\theta} - \int \frac{d\theta'}{\sin^{n+1}\theta'} = \mathrm{K};$$

Fig. 5.



telle est l'équation générale des courbes d'équilibre; celle des trajectoires orthogonales est, par suite (*voir* plus haut),

$$r^{n+1} - r'^{n+1} = h.$$

Cas particuliers. — Dans le cas de la nature $n = -2$, l'équation des courbes d'équilibre est donc

$$\cos\theta - \cos\theta' = \mathrm{K},$$

et celle des trajectoires orthogonales

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = h.$$

Pour $n = -1$, on a (*Exemple* 6)

$$\theta - \theta' = \mathrm{K},$$

$$\frac{r}{r'} = h.$$

Pour $n = 0$, on a (*Exemple* 2)

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\theta'}{2}} = \mathrm{K},$$

$$r - r' = h.$$

Enfin, pour $n = 1$, on a (*Exemple 4*)

$$\cot\theta - \cot\theta' = \mathrm{K},$$
$$r^2 - r'^2 = h.$$

Remarque. — Quand on a obtenu les trajectoires orthogonales d'une famille de courbes donnée, il est quelquefois facile de les rapporter toutes deux au même système de coordonnées bi-polaires.

Exemple. — Soient les deux familles orthogonales

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h,$$
$$\cos\theta + \cos\theta' = \mathrm{K},$$

on a les relations

$$r^2 = 4c^2 + r'^2 - 4cr'\cos\theta',$$
$$r'^2 = 4c^2 + r^2 - 4cr\cos\theta.$$

d'où, pour la seconde équation,

$$\frac{4c^2 + r'^2 - r^2}{4cr'} + \frac{r'^2 - r^2 - 4c^2}{4cr} = \mathrm{K}.$$

Soient encore les familles orthogonales

$$r + r' = h,$$
$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\operatorname{tang}\frac{\theta'}{2} = \mathrm{K},$$

il est facile d'écrire la première équation sous la forme

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\theta'}{2}} = h',$$

h' désignant une constante arbitraire.